

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тихоокеанский государственный университет»

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и задания
для выполнения расчетно-графической работы
для студентов технических специальностей
дневной формы обучения

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2008

УДК 519.2

Теория вероятностей и математическая статистика : методические указания и задания для выполнения расчетно-графической работы для студентов технических специальностей дневной формы обучения / сост. Т. М. Попова. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2008. – 32 с.

Методические указания составлены на кафедре прикладной математики и информатики. В них изложены основные понятия теории вероятностей и математической статистики, рассмотрены примеры решения задач. Даны задания для выполнения расчетно-графической работы, теоретические вопросы по курсу. Методические указания рекомендованы для студентов, изучающих дисциплину «Теория вероятностей и математическая статистика».

Печатается в соответствии с решениями кафедры «Прикладная математика и информатика» и методического совета факультета математического моделирования и процессов управления.

© Тихоокеанский государственный университет, 2008

Оглавление

Общие сведения	3
1. Случайные события. Вероятность	3
2. Теоремы сложения и умножения событий	4
3. Формула полной вероятности	6
4. Схема повторений испытаний	7
5. Случайные величины, функция и плотность распределения	9
6. Дискретные и непрерывные случайные величины	11
7. Числовые характеристики случайных величин	14
8. Элементы математической статистики	17
9. Оценки числовых характеристик	17
10. Статистические гипотезы. Критерии.	20
Теоретические вопросы	22
Задания для расчетно-графической работы	23
Библиографический список	26
Приложения	27

Общие сведения

Цель любой науки – описание, объяснение и предсказание явлений на основе установленных законов. Многие явления окружающего мира взаимно связаны и влияют одно на другое. Проследить все связи и определить влияние каждой из них на явление не всегда представляется возможным, поэтому ограничиваются изучением влияния лишь основных факторов, определяющих течение явления.

Теория вероятностей логически изучает закономерности случайных явлений и имеет дело с математическими моделями случайных явлений. Математическая статистика – наука, изучающая методы обработки результатов массовых явлений, обладающих статистической устойчивостью, закономерностью, с целью выявления этой закономерности. Обработав результаты наблюдений, исследователь выдвигает ряд гипотез, предположений о том, что рассматриваемое явление можно описать той или иной вероятностной теоретической моделью. Далее, используя математико-статистические методы, можно дать ответ на вопрос, какую из гипотез или моделей следует принять. Именно та модель и считается закономерностью для случайного явления.

1. Случайные события. Вероятность

Случайными называют такие события, которые могут произойти или не произойти при осуществлении совокупности условий, связанных с появлением этого события, т. е. испытаний (случайные события обозначим $A, B, C, \dots$).

Каждому случайному событию A можно поставить в соответствие число $P(A)$, которое назовем **вероятностью**, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Достоверному событию A (событию, которое должно произойти при любом испытании) приписывается вероятность $P(A) = 1$.

Невозможному событию B (событию, которое не может произойти ни при одном испытании) приписывается вероятность $P(A) = 0$.

События назовем **несовместными**, если в результате испытания может появиться только одно из событий.

Несколько событий образуют **полную группу событий**, если они попарно несовместны и в результате испытаний обязательно происходит одно из событий.

Пусть исходом испытания будет одно из n равновозможных событий, образующих полную группу. Пусть в результате $m(A)$ раз из них происходит некоторое событие A . Такие исходы назовем **благоприятными**. Вероятность появления события A равна отношению

числа благоприятных исходов к числу всевозможных исходов. Это правило называется **классическим определением вероятности**:

$$P(A) = \frac{m(A)}{n}. \quad (1.1)$$

Пример 1.1. Найти вероятность выпадения семи очков в сумме на верхних гранях двух игральных костей.

Решение. Каждая игральная кость имеет по шесть граней, следовательно, число всевозможных исходов выпадения различных комбинаций очков равна 36. Событие A – сумма очков равна семи – состоит из исходов: $\{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$, следовательно, число благоприятных исходов равно 6. Отсюда по формуле (1.1), вероятность события A : $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Пример 1.2. В корзине 10 белых шаров и 5 черных. Не глядя, из корзины вынимают 3 шара. Найти вероятность, что только два из них белые.

Решение. Число благоприятных исходов n равно числу сочетаний из 15 шаров (10 белых и 5 черных) по 3 шара (все выборки отличаются только составом):

$$n = C_{15}^3 = \frac{15!}{3!12!} = 455.$$

Число благоприятных исходов m равно произведению числа сочетаний из 10 белых шаров по два и числа сочетаний из 5 по одному:

$$m(A) = C_{10}^2 \cdot C_5^1 = \frac{10!5!}{8!2!4!1!} = 255.$$

Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = \frac{255}{455} \cong 0,4945.$$

2. Теоремы сложения и умножения событий

Сумма двух событий $(A + B)$ есть событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий.

Произведение двух событий (AB) есть событие, состоящее в одновременном появлении событий.

Событие, **противоположное** событию A ($\bar{A}$), состоит в неоявлении события.

Условная вероятность одного события при условии появления другого есть отношение вероятности одновременного появления событий к вероятности появления события-условия:

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (2.1)$$

События называются **независимыми**, если появление одного не влияет на вероятность появления другого, т. е. $P_B(A) = P(A)$.

Теорема сложения событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.2)$$

Теорема умножения событий. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности появления одного события на условную вероятность появления другого:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \quad (2.3)$$

Вероятность противоположного события $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Теорема сложения для независимых событий. Вероятность появления хотя бы одного из нескольких независимых событий равна разности единицы и произведения вероятностей их неоявлений:

$$P\left(\sum_{j=1}^n A_j\right) = 1 - \prod_{j=1}^n P(\bar{A}). \quad (2.4)$$

Пример 2.1. Из колоды карт 36 листов подряд вынимают по одной 3 карты. Найти вероятность, что это все тузы.

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что первым выйдет туз, B – вторым выйдет туз и C – третьим выйдет туз. Используя формулу (2.3), получаем, что искомая вероятность равна $P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$. Для каждой вероятности число благоприятных исходов 4, 3, 2 соответственно, а число всевозможных – 36, 35, 34. Таким образом, получаем

$$P(ABC) = \frac{4}{36} \frac{3}{35} \frac{2}{34} = \frac{3}{5355}.$$

Пример 2.2. Два стрелка независимо друг от друга производят по одному выстрелу. Вероятность, что первый попадет в «десятку», равна 0,8, а второй – 0,7. Найти вероятность того, что в «десятку» попадет а) только один стрелок, б) хотя бы один стрелок.

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что первый стрелок попадет в «десятку», B – событие, что второй стрелок попадет в «десятку», тогда $P(A) = 0,8$; $P(B) = 0,7$; $P(\bar{A}) = 0,2$; $P(\bar{B}) = 0,3$.

- 1) C – событие, состоящее в том, что попал только один стрелок, есть $C = A\bar{B} + \bar{A}B$, т. е. попал первый стрелок и не попал второй или наоборот. Так как события $A\bar{B}$ и $\bar{A}B$ несовместные события, то

$$P(C) = P(A\bar{B} + \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = 0,8 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,38.$$

- 2) $A + B$ – событие, состоящее в том, что попадет хотя бы один стрелок. По теореме сложения $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, так как A и B независимые события: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Отсюда получаем

$$P(A + B) = 0,8 + 0,7 - 0,8 \cdot 0,7 = 0,94.$$

3. Формула полной вероятности

Рассмотрим события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образующие полную группу. Пусть B событие, которое происходит вследствие одного из событий A_j . События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются гипотезами. Необходимо найти вероятность события B вне зависимости от условий его появления.

Теорема (формула полной вероятности). Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу, являются условиями появления события B , то вероятность появления события B вне зависимости от условий его проявления есть сумма произведений вероятностей появления условий на условную вероятность появления события:

$$P(B) = \sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P_{A_j}(B). \quad (3.1)$$

Пусть событие B произошло, тогда необходимо пересчитать вероятности гипотез, т. е. $P_B(A_j)$. Эти вероятности можно вычислить, используя теорему умножения:

$$P_B(A_j) = \frac{P(A_j) \cdot P_{A_j}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \cdot P_{A_j}(B)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P_{A_j}(B)}. \quad (3.2)$$

Эти формулы называются **формулы Бейеса**.

Пример 3.1. Два цеха производят продукцию двух видов – I и II. Первый цех производит 60 % продукции I вида, а второй – 70 % продукции I вида. Оба цеха поставляют продукцию на один склад в одинаковых объемах. Найти вероятность того, что а) случайно выбранный образец продукции I вида, б) что этот образец изготовлен во втором цехе.

Решение. Пусть B – событие, состоящее в том, что «выбранный образец I вида продукции», A_1 – образец изготовлен в первом цехе, A_2 – образец изготовлен во втором цехе, тогда $P(A_1) = 0,5$ и $P(A_2) = 0,5$.

а) Из условия задачи очевидно, что условные вероятности появления образца I вида изготовленного в первом и во втором цехах, равны $P_{A_1}(B) = 0,6$ и $P_{A_2}(B) = 0,7$. По формуле полной вероятности (3.1) получаем

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) = 0,5 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,7 = 0,65.$$

б) Вероятность того, что случайно выбранный образец I вида изготовлен во втором цехе, найдем по формуле Бейеса (3.2)

$$P_B(A_2) = \frac{P(A_2) \cdot P_{A_2}(B)}{P(B)} = \frac{0,5 \cdot 0,7}{0,65} \cong 0,5385.$$

4. Схема повторений испытаний

Особое место в теории вероятности занимают задачи, связанные с повторяющимися в одинаковых условиях опытами.

Пусть проводится n испытаний, в каждом из которых с одной и той же вероятностью p : ($0 < p < 1$) может появиться некоторое событие A и с вероятностью $q = 1 - p$ может не появиться. Требуется найти вероятность события, что в результате n испытаний событие появилось ровно k раз ($P_n(k)$) или от k до m раз ($P_n(k, m)$).

Если число опытов мало, т. е. $n < 30$, тогда вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p , событие наступит ровно k раз, вычисляется по **формуле Бернулли**

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}, \quad (4.1)$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) n$.

Вероятность того, что событие наступит от k до m раз

$$P_n(k, m) = P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(m).$$

Если число опытов велико, то формула Бернулли неприменима. В этом случае используем предельные теоремы.

Теорема Пуассона. Пусть np является постоянной величиной, когда n неограниченно возрастает, т. е. $\lambda = np$. Тогда для любого фиксированного k и любого постоянного λ

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ np = \lambda}} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Из теоремы Пуассона следует приближенная формула вычисления вероятности, что в n испытаниях событие появится ровно k раз, при большом числе опытов и малой вероятности $p < 0,1$ – **формула Пуассона (редких событий)**:

$$P_n(k) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}.$$

Теорема Муавра-Лапласа (локальная). Пусть $x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ ограничена при $k \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\sqrt{npq} P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x_k^2}{2}\right\}.$$

Теорема Муавра-Лапласа (интегральная). Пусть $x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ и $x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ ограничены при $k \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| P_n(k, m) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_k}^{x_m} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx \right| = 0.$$

Обозначим $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$ – дифференциальную функцию

Лапласа (или функцию Гаусса), а $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2}\right\} d\xi$ –

интегральную функцию Лапласа. Из теорем Муавра-Лапласа следуют приближенные формулы для вычисления искомых вероятностей при большом числе опытов и вероятности $p \geq 0,1$:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_k), \quad (4.2)$$

$$P_n(k, m) \approx \Phi(x_m) - \Phi(x_k). \quad (4.3)$$

Пример 4.1. Вероятность, что покупателю потребуется обувь более чем 42-го размера, равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 покупателей не более чем двум потребуется обувь более чем 42-го размера.

Решение. Для решения применим формулу Бернулли (4.1). По условию $n = 6, p = 0,2$. Искомая вероятность $P = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2)$.

$$k = 0: P_6(0) = \frac{6!}{0! 6!} (0,2)^0 (0,8)^6 = (0,8)^6 = 0,262144,$$

$$k = 1: P_6(1) = \frac{6!}{1! 5!} (0,2)^1 (0,8)^5 = 6 (0,8)^5 0,2 = 0,393216,$$

$$k = 2: P_6(2) = \frac{6!}{2! 4!} (0,2)^2 (0,8)^4 = \frac{6 \cdot 5}{2} (0,2)^2 (0,8)^4 = 0,24576.$$

Отсюда $P = 0,262144 + 0,393216 + 0,24576 = 0,90112$.

Пример 4.2. Вероятность рождения мальчика 0,515. Найти вероятность того, что из 200 новорожденных а) 95 девочек, б) хотя бы 95 девочек.

Решение. Используем теоремы Муавра-Лапласа при $n = 200$ и $p = 0,485$. Так как необходимо найти вероятности рождения девочек, то $p = 1 - 0,515$.

а) По формуле (4.2), при $k = 95$, получаем

$$\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0,485 \cdot 0,515} = 7,068, \quad x_k = \frac{95 - 200 \cdot 0,485}{7,068} \cong -0,283,$$

по таблице (приложение 1) найдем значение дифференциальной функции Лапласа $\varphi(-0,283) = \varphi(0,283) = 0,3836$, отсюда

$$P_{200}(95) = \frac{0,3836}{7,068} = 0,05427.$$

б) По формуле (4.3), при $k = 95, m = 200$, получаем

$$x_m = \frac{200 - 200 \cdot 0,485}{7,068} \cong 14,57,$$

тогда $P_{200}(95, 200) = \Phi(14,57) - \Phi(-0,283) = 0,5 + 0,1103 = 0,6103$. Значение интегральной функции Лапласа найдем по таблице (приложение 2).

5. Случайные величины, функция и плотность распределения

Случайной (СВ) называют величину X , которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное заранее неизвестное значение x из множества возможных значений (Ξ_X) .

Набор случайных величин $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ называют **случайным вектором** или многомерной случайной величиной.

Функция распределения случайной величины $F(x)$ – вероятность случайного события, состоящего в том, что случайная величина X принимает значения менее аргумента функции x . $F(x) = P(X < x)$.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

- 1) $0 \leq F(x) \leq 1$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$,
- 3) $F(x)$ – неубывающая функция,
- 4) $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Совместная функция распределения есть

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n).$$

Свойства совместной функции распределения:

- 1) Совместная функция распределения является неубывающей функцией каждого аргумента при фиксированных остальных.
- 2) Если хотя бы для одного j $x_j = -\infty$, то $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.
- 3) Если $x_j = \infty$, то $F(x_1, x_2, \dots, \infty, \dots, x_n)$ – совместная функция распределения $n-1$ переменной.

Плотность распределения случайной величины $f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$.

Если $F(x)$ – дифференцируемая функция, то $f(x) = F'(x)$.

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

- 1) $f(x) \geq 0$, для любых $x \in \mathbf{R}$
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$,
- 3) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi$,
- 4) $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx$.

Если существует неотрицательная функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, такая что

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \dots dy_n, \text{ то } f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

называется **совместной плотностью распределения**.

Свойства совместной плотности распределения:

- 1) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \dots dy_n = 1$,
- 2) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$,
- 3) для любого j $f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) dx_j$

является совместной плотностью распределения $n-1$ случайных величин,

- 4) если $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, то вероятность $P(\vec{X} \in \Omega) = \iint_{\Omega} f(x_1, x_2, \dots, x_n) d\Omega$.

6. Дискретные и непрерывные случайные величины

Случайная величина называется **дискретной**, если множество ее возможных значений конечно или счетно, т. е. $\Xi_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

Закон распределения дискретной случайной величины есть всякое соотношение между возможными значениями случайной величины и вероятностью ее принятия: $x_j \Rightarrow p_j = P(X = x_j)$. Один из способов задания дискретной случайной величины – это таблица (ряд распределений):

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Основное свойство закона распределения $\sum_j p_j = 1$.

Функция распределения дискретной случайной величины – кусочно-постоянная функция с разрывами 1-го рода в точках соответствующих значениям случайной величины, величина скачка в точках разрыва равна соответствующей вероятности: $F(x) = \sum_{x_j < x} p_j$.

Закон распределения двумерной случайной величины есть таблица, где каждой паре возможных значений (x_i, y_j) ставится в соответствие вероятность принятия каждой компонентой случайной величины соответствующих значений $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, при этом $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$:

X	Y			
	y_1	y_2	$\dots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mn}

Случайная величина называется **непрерывной**, если ее функция распределения непрерывна. Непрерывную случайную величину чаще описывают плотностью распределения.

Примеры дискретных распределений

1. **Биномиальное распределение:** X – количество появлений события в n независимых испытаниях, если вероятность появления его в одном испытании равна p :

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 < p < 1, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

2. *Распределение Пуассона*: предельное биномиальное распределение

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

3. *Геометрическое распределение*: X – число безуспешных попыток до первого появления события, p – вероятность появления события в одном опыте:

$$P(X = k) = p(1-p)^k, \quad 0 < p < 1, k = 0, 1, 2, \dots$$

Примеры непрерывных распределений

1. *Равномерное распределение*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \quad -\infty < a < b < \infty.$$

2. *Нормальное распределение* (с параметрами (a, σ))

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < a < \infty, \quad \sigma > 0.$$

3. *Показательное распределение* (с параметром $\lambda > 0$)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Пример 6.1. Изделие проходит тестирование четырьмя тестами. Вероятность того, что изделие пройдет первый тест, равна 0,9, второй – 0,8, третий – 0,7, четвертый – 0,6. К следующему тесту изделие допускается после успешного результата в предыдущем. Составить ряд распределения случайной величины X – количество тестов, которым подвергается изделие. Найти вероятность того, что изделие подвергнется не менее трем тестам.

Решение. Множество возможных значений случайной величины X есть $\Xi_X = \{1, 2, 3, 4\}$. Случайное событие $X=1$ состоит в том, что изделие подвергнется только одному тесту: первому, и не пройдет его, т. е. не будет подвергаться второму тесту: $P(X=1) = 1 - 0,9 = 0,1$. Случайное событие $X=2$ состоит в том, что изделие подвергнется только двум тестам: первому и второму, успешно пройдет первый и не пройдет второй: $P(X=2) = 0,9(1 - 0,8) = 0,18$. Случайное событие $X=3$ состоит в том, что прибор успешно пройдет первый и второй тест и не пройдет третий:

$$P(X = 3) = 0,9 \cdot 0,8 (1 - 0,7) = 0,216,$$

$$P(X = 4) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) = 1 - 0,1 - 0,18 - 0,216 = 0,504.$$

Таким образом ряд распределения случайной величины имеет вид:

X	1	2	3	4
p	0,1	0,18	0,216	0,504

Вероятность того, что изделие подвергнется не менее трем тестам:
 $P = P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0,216 + 0,504 = 0,720.$

Пример 6.2. Функция плотности распределения непрерывной случайной величины, принимающей значения на интервале $(0, \pi)$ имеет вид $f(x) = A \sin x$, если $x \in (0, \pi)$ и вне интервала равна нулю. Найти значение параметра A и функцию распределения $F(x)$.

Решение. Значение параметра A найдем, используя свойство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \text{ следовательно,}$$

$$1 = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\pi} A \sin x dx + \int_{\pi}^{+\infty} 0 dx = -A \cos x \Big|_0^{\pi} = A(1 - (-1)) = 2A,$$

отсюда $A = 0,5$.

Функцию распределения найдем, используя свойство $F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi$.

Если $x \leq 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$. Далее, если $0 < x \leq \pi$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x 0,5 \sin \xi d\xi = -0,5 \cos \xi \Big|_0^x = 0,5 - 0,5 \cos x,$$

если $x > \pi$, то $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\pi} 0,5 \sin x dx + \int_{\pi}^x 0 dx = 1,$

Таким образом, функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0,5 - 0,5 \cos x, & 0 < x \leq \pi \\ 1, & \pi < x \end{cases}$$

7. Числовые характеристики случайных величин

Закон распределения случайной величины может быть описан функцией или плотностью распределения. Но иногда достаточно указать отдельные числовые параметры, частично характеризующие особенности распределения.

Математическое ожидание (MX) – неслучайная величина, около которой группируются возможные значения случайной величины (среднее арифметическое значение всевозможных реализаций случайной величины).

Если X – дискретная случайная величина, то

$$MX = \sum_{j=1}^n x_j p_j; \quad (7.1)$$

если X – непрерывная случайная величина, то

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (7.2)$$

Свойства математического ожидания:

- 1) $Mc = 0$, 2) $M(cX) = cMX$, 3) $M(X + Y) = MX + MY$,
- 4) если случайные величины X и Y независимые (т.е. случайные события, связанные со значениями случайных величин, независимые), то $M(XY) = MX \cdot MY$.

Дисперсия (DX) – математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, неслучайная величина, характеризующая разброс значений вокруг математического ожидания. $DX = M(X - MX)^2$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{DX}$.

Свойства дисперсии и среднего квадратического отклонения:

- 1) $DX = MX^2 - (MX)^2$, 2) $Dc = 0$, $\sigma(c) = 0$,
- 3) $D(cX) = c^2 DX$, $\sigma(cX) = |c| \sigma(X)$,
- 4) если случайные величины X и Y независимые, то $D(X + Y) = DX + DY$.

Если X – дискретная случайная величина, то

$$DX = \sum_{j=1}^n (x_j - MX)^2 p_j = \sum_{j=1}^n x_j^2 p_j - (MX)^2; \quad (7.3)$$

если X – непрерывная случайная величина, то

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (MX)^2. \quad (7.4)$$

По формуле (7.4) для дисперсии, получаем

$$DX = 0,5 \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx - (MX)^2 = 0,5 \cdot \left(-x^2 \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x \cdot \cos x dx \right) - \frac{\pi^2}{4} =$$

$$= 0,5 \cdot \pi^2 + x \sin x \Big|_0^{\pi} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Пример 7.2. Двумерная случайная величина задана законом распределения:

X	Y		
	0	2	5
1	0,2	0	0,1
2	0,1	0,05	0,05
3	0	0,15	0,35

Найти числовые характеристики компонент случайной величины (математическое ожидание, дисперсию), коэффициент корреляции.

Решение. Найдем распределение компонент случайной величины. Для случайной величины X : $X=1$, случайная величина Y принимает всевозможные значения, следовательно,

$$P(X=1) = P((X=1), (Y=0) + (Y=2) + (Y=5)) = P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=5) = 0,2 + 0 + 0,1 = 0,3,$$

аналогично $P(X=2) = 0,1 + 0,05 + 0,05 = 0,2$ и $P(X=3) = 0,5$.

Найдем математическое ожидание случайной величины X :
 $MX = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,5 = 2,2$.

Найдем дисперсию $DX = 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,5 - (2,2)^2 = 0,76$.

Распределение компоненты Y имеет вид:

Y	0	2	5
P	0,3	0,2	0,5

$$MY = 0 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,5 = 2,9,$$

$$DY = 0 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,2 + 5^2 \cdot 0,5 - (2,9)^2 = 4,89.$$

Найдем коэффициент корреляции двумерной случайной величины:

$$\rho(X, Y) = \frac{M(XY) - MX \cdot MY}{\sqrt{DX \cdot DY}},$$

$$M(XY) = 1 \cdot 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0 \cdot 0,1 + 2 \cdot 2 \cdot 0,05 + 2 \cdot 5 \cdot 0,05 +$$

$$+ 3 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 5 \cdot 0,35 = 7,35,$$

отсюда

$$\rho(X, Y) = \frac{7,35 - 2,2 \cdot 2,9}{\sqrt{0,76 \cdot 4,89}} = 0,509.$$

8. Элементы математической статистики

Значения исследуемой характеристики, полученные в результате серии из N опытов, назовем **выборкой**, которая может быть представлена в виде **статистического ряда** (таблицы значений и частот их появления) или интервального статистического ряда.

Статистический ряд

x	x_1	x_2	...	x_k
n	n_1	n_2	...	n_k

Число $N = \sum_{i=1}^k n_i$ — называется **объемом** выборки. Статистический ряд представляется **полигоном частот** (рис. 8.1).

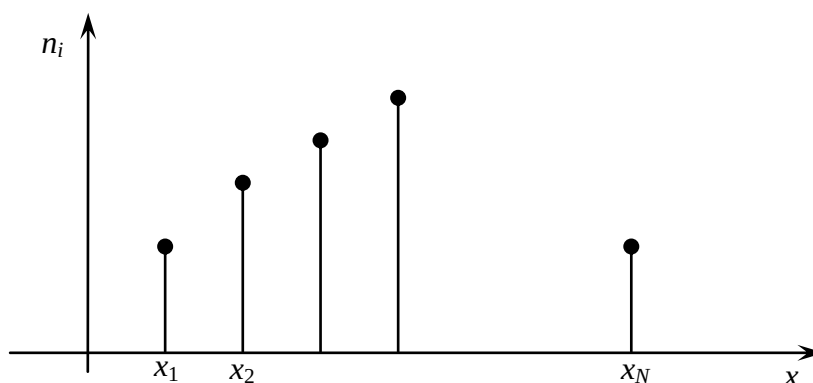


Рис.8.1

Интервальный статистический ряд:

x	$x_0 - x_1$	$x_1 - x_2$	...	$x_{k-1} - x_k$
n	n_1	n_2	...	n_k

По интервальному ряду можно построить **гистограмму частот** — множество прямоугольников с основаниями равными длинам интервалов, высотой $h_i = \frac{n_i}{x_i - x_{i-1}}$ (рис. 8.2)

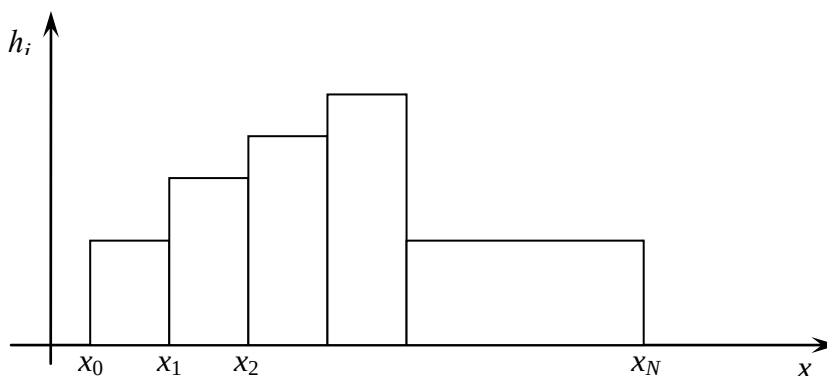


Рис. 8.2

9. Оценки числовых характеристик

Оценки числовых характеристик делятся на точечные и интервальные. Методы построения точечных оценок: метод максимального правдоподобия и метод моментов.

Метод максимального правдоподобия – метод нахождения оценки неизвестного параметра, основанный на минимизации функции правдоподобия $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X = x_1)P(X = x_2) \cdots P(X = x_n)$ для дискретной случайной величины или $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n)$ для непрерывной случайной величины.

Метод моментов – метод нахождения оценки неизвестного параметра, основанный на выборочном моменте, т. е. $\nu_k^* = \frac{1}{n} \sum_j x_j^k n_j$

Точечная оценка математического ожидания – **выборочная средняя**:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i n_i. \quad (9.1)$$

Точечная оценка дисперсии – **выборочная дисперсия**:

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i, \quad (9.2)$$

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i - \frac{N}{N-1} \bar{x}^2. \quad (9.3)$$

Доверительный интервал – интервал $(\theta_1(X), \theta_2(X))$ для оценки параметра θ , построенный по выборке X и с заданной вероятностью γ (**доверительная вероятность**), покрывающий оцениваемый параметр.

Доверительный интервал для математического ожидания

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{N}} < MX < \bar{x} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{N}}, \quad (9.4)$$

где t_γ – аргумент распределения Стьюдента, соответствующий доверительной вероятности $\gamma = 1 - \alpha$ и $N-1$ степени свободы (находится по приложению 3).

Доверительный интервал для неизвестной дисперсии

$$S^2 - z_\alpha \frac{\sqrt{\bar{S}^{(4)} - (S^2)^2}}{\sqrt{N}} < DX < S^2 + z_\alpha \frac{\sqrt{\bar{S}^{(4)} - (S^2)^2}}{\sqrt{N}}, \quad (9.5)$$

где $\bar{S}^{(4)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x})^4 n_j$; z_α – квантиль порядка α функции Лапласа

$\Phi(x)$, т. е. $\Phi(z_\alpha) \leq \alpha$ (приложение 2).

Пример 9.1. По представленной выборке построить гистограмму частот. Найти точечные оценки математического ожидания и дисперсии. Построить доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью $p = 0,99$.

x	0 – 6	6 – 10	10 – 14	14 – 18	18 – 20
n	8	12	26	14	10

Решение. Чтобы построить гистограмму необходимо найти

$$h_i = \frac{n_i}{x_i - x_{i-1}}, \quad h_1 = \frac{8}{6-0} = \frac{4}{3}, \quad h_2 = \frac{12}{10-6} = 3, \quad h_3 = \frac{26}{14-10} = 6,5, \quad h_4 = \frac{14}{18-14} = 3,5, \quad h_5 = \frac{10}{20-18} = 5.$$

Строим гистограмму частот (см. рис. 9.1).

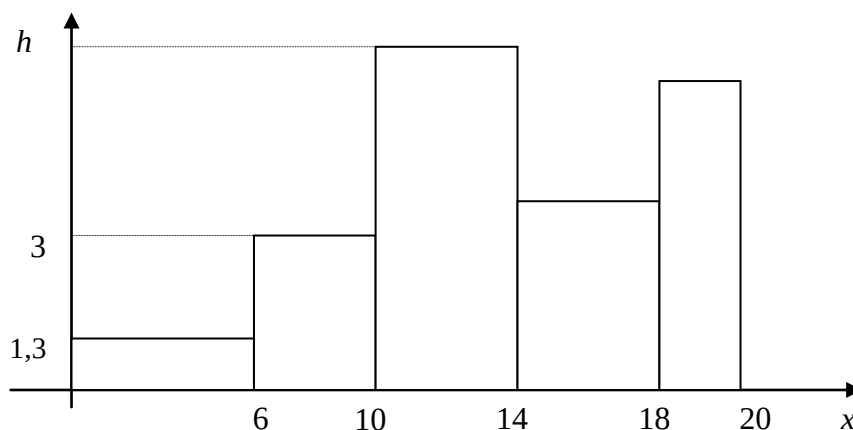


Рис.3

Для нахождения точечных оценок построим статистический ряд. Для этого найдем середины каждого интервала, тогда получаем:

x	3	8	12	16	19
n	8	12	26	14	10

Находим выборочную среднюю:

$$\bar{x} = \frac{1}{70} (3 \cdot 8 + 8 \cdot 12 + 12 \cdot 26 + 16 \cdot 14 + 19 \cdot 10) = 12,08.$$

Оценка дисперсии:

$$S^2 = \frac{1}{69} (3^2 \cdot 8 + 8^2 \cdot 12 + 12^2 \cdot 26 + 16^2 \cdot 14 + 19^2 \cdot 10) - \frac{70}{69} (12,65)^2 = 22,51.$$

Построим доверительный интервал для математического ожидания: $\bar{x} = 12,08$, $S = \sqrt{22,51} = 4,74$. Найдем по таблице (приложение 3) аргумент распределения Стьюдента, соответствующий вероятности $p = 0,99$, числу степеней свободы $N - 1 = 69$. , $t_\gamma = 2,6479$. Следовательно,

$$t_\gamma \frac{S}{\sqrt{N}} = 2,6479 \frac{4,74}{\sqrt{70}} = 1,4956, \text{ получаем}$$

$12,08 - 1,4956 < MX < 12,08 + 1,4956$,
 доверительный интервал: $10,58 < MX < 13,57$.
 Ответ: Оценка математического ожидания $\bar{x} = 12,08$, оценка дисперсии
 $S = \sqrt{22,51} = 4,74$, доверительный интервал $(10,58; 13,57)$.

10. Статистические гипотезы. Критерии

Предположим, что функция распределения случайной величины X нам неизвестна. Мы располагаем случайной выборкой $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. По наблюдениям выборки X_n мы хотим дать ответ на вопрос: совпадает функция распределения $F(x)$ с некоторой наперед заданной функцией $F_0(x)$ или нет. При такой постановке задачи говорят, что речь идет о проверке **статистической гипотезы согласия**.

По представленным наблюдениям необходимо принять гипотезу о том, что функция распределения $F(x)$ совпадает с некоторой наперед заданной функцией, либо ее отвергнуть. Правило принятия одного из этих двух решений называется **статистическим критерием**.

Рассмотрим гипотезу о том, что функция распределения случайной величины X совпадает с функцией $F_0(x)$. Обозначим эту гипотезу H_0 – начальная гипотеза. Через H_1 обозначим альтернативную гипотезу о том, что $F(x) \neq F_0(x)$ хотя бы при одном значении x . Так как наблюдения случайны, то вывод об абсолютной достоверности той или иной гипотезы невозможен и возникает вероятность некоторой ошибки.

Вероятность ошибки первого рода (уровень значимости критерия) – вероятность α отвергнуть гипотезу H_0 , если она верна.

Вероятность ошибки второго рода – вероятность β принять гипотезу H_0 при условии, что верна гипотеза H_1 .

Рассмотрим **эмпирическую функцию распределения**, построенную по выборке X_n , т. е. случайную функцию $F_n(x) = \sum_{x_k < x} \frac{n_k}{n}$, где n_k – число элементов выборки меньше аргумента функции.

Рассмотрим функцию

$$D_n(X_n) = \sqrt{n} \max_R |F_n(x) - F_0(x)|, \quad (10.1)$$

которая называется **статистикой Колмогорова**.

Критерий согласия Колмогорова – правило следующего вида: если $D_n(X_n) < z_{1-\alpha}$, то принимаем гипотезу H_0 , т. е. считаем, что $F(x) = F_0(x)$, а если $D_n(X_n) \geq z_{1-\alpha}$, то принимаем гипотезу H_1 . При таком правиле

вероятность отвергнуть гипотезу H_0 при условии, что она верна, равна α . Здесь $z_{1-\alpha}$ – аргумент функции распределения Колмогорова $K(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, найденный по таблице (приложение 4).

Рассмотрим другой подход к проверке гипотез о распределении. Пусть вещественная прямая разбита на k непересекающихся интервалов $\bigcup_{j=1}^k I_j$. Обозначим $p_j = P(X \in I_j)$ – вероятность того, что случайная величина X попадает в соответствующий интервал. Пусть X^o – случайная величина с известным законом распределения, и $p_j^o = P(X^o \in I_j)$. В качестве начальной гипотезы H_0 рассмотрим гипотезу о том, совпадают ли вероятности p_j , построенные по выборке X_n , с вероятностями p_j^o (теоретические вероятности). H_1 – противоположная гипотеза: $p_j \neq p_j^o$ хотя бы при одном j . Обозначим через n_j число наблюдений x_m , которые принадлежат интервалу I_j .

Функция

$$\Delta_n(X_n) = \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - np_j^o)^2}{np_j^o} \quad (10.2)$$

называется **статистикой Пирсона** с $k - 1$ степенью свободы.

Критерий согласия Пирсона (критерий хи-квадрат) – правило, состоящее в следующем: если $\Delta_n(X_n) < \chi_{1-\alpha}^2$, то принимаем гипотезу H_0 , если $\Delta_n(X_n) \geq \chi_{1-\alpha}^2$, то принимаем гипотезу H_1 , где $\chi_{1-\alpha}^2$ – аргумент функции распределения Пирсона с уровнем значимости α и $k - 1$ степенью свободы, найденный по таблице (приложение 5).

Пример 10.1. Через равные промежутки времени прибор регистрирует количество частиц попавших в данную среду в поле зрения датчика. В результате получены следующие данные:

Число частиц	0	1	2	3	4	5	6	7
Число моментов времени	112	168	130	68	32	5	1	1

Проверить по критерию Пирсона, что с уровнем значимости $\alpha = 0,05$ число частиц, регистрируемых прибором в любой момент времени, распределено по закону Пуассона с математическим ожиданием $\lambda = 1,5$.

Решение. Пусть X_j - число частиц, регистрируемых в j -й промежуток времени. Считаем величины X_j , $j = 1, 2, \dots, n$, независимыми и одинаково распределенными. Общий объем выборки равен $n = 517$. Пусть X^0 – случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром $\lambda = 1,5$:

$$P(X^0 = s) = \frac{\lambda^s}{s!} e^{-\lambda}, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Используя эту формулу, найдем теоретические вероятности p_s^0 попадания числа частиц в поле зрения датчика и теоретические частоты np_s^0 :

X	0	1	2	3	4	5	6	7
n_s	112	168	130	68	32	5	1	1
p_s^0	0,2231	0,3347	0,251	0,1255	0,0471	0,0141	0,0035	0,001
np_s^0	115,34	173,04	129,77	64,88	24,35	7,29	1,8	0,517

По формуле (10.2) вычисляем статистику Пирсона $\Delta_n \cong 4,3$. Найдем по таблицам распределения Пирсона значение аргумента, соответствующего уровню значимости $\alpha = 0,05$ и 7 степеням свободы, получаем $\chi_{1-\alpha}^2 = 14,067$. По критерию Пирсона $\Delta_n(X_n) = 4,3 < \chi_{1-\alpha}^2 = 14,067$, следовательно, принимаем гипотезу о Пуассоновском распределении числа частиц в среде.

Теоретические вопросы

1. События. Действия над событиями.
2. Классическое, геометрическое определение вероятности.
3. Теорема сложения событий
4. Условная вероятность. Теорема умножения событий.
5. Формулы полной вероятности, Бейеса.
6. Схема независимых испытаний, формула Бернулли.
7. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.
8. Формула Пуассона.
9. Случайная величина, функция распределения случайной величины, плотность распределения, свойства.
10. Математическое ожидание, свойства.

11. Дисперсия и среднее квадратичное отклонение, свойства.
12. Основные законы распределения дискретной случайной величины (биномиальный, Пуассона, геометрический и т.д.).
13. Непрерывная случайная величина. Равномерный закон распределения.
14. Показательный закон распределения непрерывной случайной величины.
15. Нормальный закон распределения непрерывной случайной величины.
16. Ковариация и коэффициент корреляции, свойства.
17. Неравенство Чебышева.
18. Первая теорема Чебышева.
19. Вторая теорема Чебышева.
20. Теорема Бернулли (закон больших чисел). Теорема Пуассона
21. Характеристические функции, свойства.
22. Центральная предельная теорема. (Ляпунова)
23. Выборка. Вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения, свойства. Полигон, гистограмма.
24. Статистические оценки. Свойства. Методы построения.
25. Оценка математического ожидания (точечная)
26. Оценки дисперсии (точечные)
27. Доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии.
28. Статистические гипотезы. Критерии.
29. Критерии согласия.

Задания для расчетно-графической работы

a – количество букв фамилии

b – количество букв имени

N – номер варианта

Вариант 1 (нечетные N)

1. В ящике a шаров, $|a - b|$ из них белые. Из ящика случайным образом вынимают $[a/3]$ шара. Найти вероятность, что среди них нет белых.
2. Выбирают два положительных действительных числа: первое меньше a , второе меньше b . Найти вероятность, что их произведение меньше $(a + b)/5$.
3. Прибор может работать в двух режимах – A и B . Режим A наблюдается в $0, a$ случаях. Вероятность отказа прибора при работе в режиме $A - 0,1$, вероятность отказа при работе в режиме $B - 0, b$. Найти вероятность отказа прибора.

4. Найти вероятность, что в $100b$ испытаниях событие появится не менее $(a + b)$ раз. Вероятность появления события – $0, a$.

5. Заданы распределения двух случайных величин (СВ) X и Y

X	b	$b-1$	$b+N$	Y	a	$a+b$
p	$1/a$	$1/a^2$	?	p	$0, b$	?

Найти ряд распределения СВ $Z = X - Y$, $T = XY$ числовые характеристики СВ X, Y, Z, T .

6. Производится 2 независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна $0, b$. Найти закон распределения, числовые характеристики, построить функцию распределения, многоугольник распределения СВ X – разность между числом попаданий и числом промахов.
7. Машина проходит технический осмотр и обслуживание. Число неисправностей, обнаруженных во время ТО, есть СВ, распределенная по закону Пуассона с параметром a . Если неисправности не обнаружены, ТО продолжается в среднем 2 часа. Если обнаружены одна или две неисправности, то на их устранение тратится еще $0, b$ часа. В остальных случаях машина ставится на профилактику, в среднем на 4 часа. Определить закон распределения СВ T – время обслуживания и ремонта машины. Найти числовые характеристики, $P(T > 2)$.
8. Время для устранения неисправности механизма есть СВ T имеющая показательное распределение с параметром $1/a$. Найти функцию и плотность распределения СВ, числовые характеристики, $P(T > a)$, $P(1 < T < b/3)$, $P(T > MT)$, $P(T \leq MT)$.
9. Случайная величина X распределена по закону прямоугольного треугольника в интервале $(0, a)$ (рис. 1). Найти функцию распределения, плотность распределения, числовые характеристики, $P(a/2 < X < a)$.

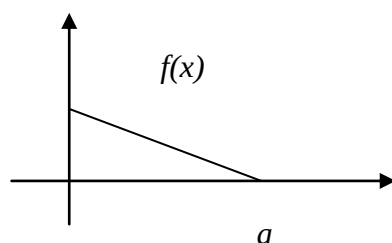


Рис. 14

10. Двумерная случайная величина имеет равномерное распределение в четырехугольнике, ограниченном прямыми: $x + y = a$, $x + y = a + b$, $x = 0$, $y = 0$. Найти совместную плотность распределения, числовые характеристики двумерной СВ.

11. Дана выборка. Найти точечные и интервальные оценки числовых характеристики. Построить гистограмму относительных частот, выдвинуть и проверить гипотезу о распределении генеральной совокупности по критерию Колмогорова.

Вариант 2 (четные N)

1. Из колоды карт (54 листа) вынимают a карт. Найти вероятность, что половина из них одной масти.
2. На полке в произвольном порядке расставляют $a+b$ книг. Среди них $|a-b|$ книг одного автора. Найти вероятность, что все они окажутся рядом.
3. В первом ящике a шаров, во втором b шаров. В первом $|a-3|$ белых, во втором $|b-4|$. Из первого ящика во второй переложили 1 шар. Найти вероятность, что случайно вынутый шар из второго ящика – белый.
4. Прибор состоит из $a \cdot 100$ независимых элементов. Вероятность отказа каждого $0,0b$. Найти вероятность, что откажет не более 1 элемента.
5. Проводятся испытания a приборов на надежность, каждый последующий подвергается испытанию, если предыдущий на испытании отказал. Вероятность, что прибор выдержит испытание, $0,b$. Составить закон распределения СВ X – число приборов, подвергшихся испытанию. Найти и построить функцию распределения, многоугольник распределения, числовые характеристики.
6. Два стрелка стреляют по мишени, делая по 2 выстрела. Вероятность попадания первого стрелка $0,a$, второго – $0,b$. Случайные величины X – количество попаданий первого, Y – количество попаданий второго стрелка. Составить законы распределения СВ X , Y , $Z = X - Y$. Найти их числовые характеристики, $P(X > MX)$, $P(Y < MY - \sigma)$.
7. В урне a шаров, $|a-b|$ из них не белые. Найти закон распределения СВ X – количество белых шаров, если случайным образом вынимаем $(a-3)$ шара. Найти числовые характеристики.
8. СВ X подчинена закону Симпсона (равнобедренного треугольника) на интервале $(-a, a)$ (рис 2). Найти плотность и функцию распределения, числовые характеристики, $P(a/2 < X < a)$.

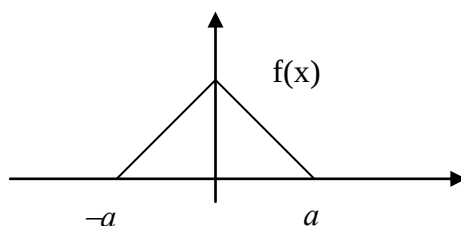


Рис. 5

9. Высота неровностей имеет нормальное распределение с параметрами b и $b/6$. Построить функцию плотности распределения, найти числовые характеристики, интервал величины неровностей, $P(b/2 < x < b)$, $P(|X - b| > \sigma)$.
10. Двумерная СВ имеет закон распределения:

X	Y		
	$-a$	0	a
$b/2$	$1/b$	$1/b^2$	$1/b^3$
b	$1/b^3$	0	$1/b^2$
$b+1$	$1/b^3$	$1/b^3$	$1/b^4$
$b+a$	0	$1/b$	$?$

- Найти вероятность p_{43} , законы распределения компонент, числовые характеристики.
11. Дана выборка. Найти точечные и интервальные оценки числовых характеристик. Построить гистограмму относительных частот, выдвинуть и проверить гипотезу о распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона.

Библиографический список

1. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Высш. шк., 2000. – 383 с.
2. *Вентцель Е. С.* Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Высш. шк., 2000. – 366 с.
3. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Высш. шк., 1999. – 576 с.
4. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика / Гмурман В.Е. – М. : Высшая школа, 2003. – 445 с.
5. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / Гмурман В.Е. – М. : Высшая школа, 2003, – 405 с.
6. *Калинина В.Н.* Математическая статистика / Калинина В.Н., Панкин В.Ф. – М. : Высш. шк., 2001. – 336 с.
7. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика / Ю. А. Розанов. – М. : Наука, 1989. 320 с.

Приближенные значения дифференциальной функции Лапласа

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$$

<i>x</i>	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Приближенные значения интегральной функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2}\right\} d\xi$$

<i>x</i>	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999

3,7	0,4999	3,8	0,4999	3,9	0,5	4	0,5	5	0,5
------------	--------	------------	--------	------------	-----	----------	-----	----------	-----

Приближенные значения квантилей $t_{1-\alpha}$ распределения Стьюдента.
с k степенями свободы

k	α					
	0,01	0,05	0,1	0,9	0,95	0,99
1	63,6559	12,7062	6,3137	0,1584	0,0787	0,0157
2	9,9250	4,3027	2,9200	0,1421	0,0708	0,0141
3	5,8408	3,1824	2,3534	0,1366	0,0681	0,0136
4	4,6041	2,7765	2,1318	0,1338	0,0667	0,0133
5	4,0321	2,5706	2,0150	0,1322	0,0659	0,0132
6	3,7074	2,4469	1,9432	0,1311	0,0654	0,0131
7	3,4995	2,3646	1,8946	0,1303	0,0650	0,0130
8	3,3554	2,3060	1,8595	0,1297	0,0647	0,0129
9	3,2498	2,2622	1,8331	0,1293	0,0645	0,0129
10	3,1693	2,2281	1,8125	0,1289	0,0643	0,0129
11	3,1058	2,2010	1,7959	0,1286	0,0642	0,0128
12	3,0545	2,1788	1,7823	0,1283	0,0640	0,0128
13	3,0123	2,1604	1,7709	0,1281	0,0639	0,0128
14	2,9768	2,1448	1,7613	0,1280	0,0638	0,0128
15	2,9467	2,1315	1,7531	0,1278	0,0638	0,0127
16	2,9208	2,1199	1,7459	0,1277	0,0637	0,0127
17	2,8982	2,1098	1,7396	0,1276	0,0636	0,0127
18	2,8784	2,1009	1,7341	0,1274	0,0636	0,0127
19	2,8609	2,0930	1,7291	0,1274	0,0635	0,0127
20	2,8453	2,0860	1,7247	0,1273	0,0635	0,0127
21	2,8314	2,0796	1,7207	0,1272	0,0635	0,0127
22	2,8188	2,0739	1,7171	0,1271	0,0634	0,0127
23	2,8073	2,0687	1,7139	0,1271	0,0634	0,0127
24	2,7970	2,0639	1,7109	0,1270	0,0634	0,0127
25	2,7874	2,0595	1,7081	0,1269	0,0633	0,0127
26	2,7787	2,0555	1,7056	0,1269	0,0633	0,0127
27	2,7707	2,0518	1,7033	0,1268	0,0633	0,0126
28	2,7633	2,0484	1,7011	0,1268	0,0633	0,0126
29	2,7564	2,0452	1,6991	0,1268	0,0633	0,0126
30	2,7500	2,0423	1,6973	0,1267	0,0632	0,0126
40	2,7045	2,0211	1,6839	0,1265	0,0631	0,0126
60	2,6603	2,0003	1,6706	0,1262	0,0630	0,0126
70	2,6479	1,9944	1,6669	0,1261	0,0629	0,0126
80	2,6387	1,9901	1,6641	0,1261	0,0629	0,0126
90	2,6316	1,9867	1,6620	0,1260	0,0629	0,0126
100	2,6259	1,9840	1,6602	0,1260	0,0629	0,0126
120	2,6174	1,9799	1,6576	0,1259	0,0628	0,0126
150	2,6090	1,9759	1,6551	0,1259	0,0628	0,0126

Приложение 4

Приближенные значения функции Колмогорова $K(x)$

x	0	0,02	0,04	0,06	0,08
0,2	0	0	0	0	0
0,3	0,00001	0,00005	0,00017	0,00051	0,00129
0,4	0,00281	0,00548	0,00973	0,01600	0,02468
0,5	0,03605	0,05031	0,06750	0,08758	0,11040
0,6	0,13573	0,16323	0,19268	0,22364	0,25578
0,7	0,28877	0,32230	0,35598	0,38964	0,42300
0,8	0,45586	0,48800	0,51937	0,54974	0,57907
0,9	0,60727	0,63429	0,66008	0,68464	0,70794
1	0,73000	0,75083	0,77043	0,78886	0,80613
1,1	0,82228	0,83736	0,85139	0,86444	0,87655
1,2	0,88775	0,89303	0,90765	0,91643	0,92451
1,3	0,93191	0,93868	0,94487	0,95051	0,95565
1,4	0,96032	0,96455	0,96838	0,97185	0,97479
1,5	0,97778	0,98031	0,98258	0,98461	0,98643
1,6	0,98805	0,98949	0,99078	0,99192	0,99293
1,7	0,99383	0,99461	0,99531	0,99592	0,99646
1,8	0,99693	0,99735	0,99771	0,99802	0,99830
1,9	0,99854	0,99874	0,99892	0,99908	0,99921
2	0,99933	0,99943	0,99952	0,99959	0,99965
2,1	0,99971	0,99975	0,99979	0,99982	0,99986
2,2	0,99987	0,99990	0,99991	0,99993	0,99994
2,3	0,99995	0,99996	0,99997	0,99997	0,99998
2,4	0,99998	0,99998	0,99999	0,99999	0,99999
2,5	0,99999	0,99999	0,99999	1,00000	1,00000

Приближенные значения квантилей $\chi^2_{1-\alpha}$ распределения Пирсона
 порядка $1 - \alpha$ и k степеней свободы

k	α					
	0,01	0,05	0,1	0,2	0,9	0,95
1	6,635	3,841	2,706	1,642	0,016	0,004
2	9,210	5,991	4,605	3,219	0,211	0,103
3	11,345	7,815	6,251	4,642	0,584	0,352
4	13,277	9,488	7,779	5,989	1,064	0,711
5	15,086	11,070	9,236	7,289	1,610	1,145
6	16,812	12,592	10,645	8,558	2,204	1,635
7	18,475	14,067	12,017	9,803	2,833	2,167
8	20,090	15,507	13,362	11,030	3,490	2,733
9	21,666	16,919	14,684	12,242	4,168	3,325
10	23,209	18,307	15,987	13,442	4,865	3,940
11	24,725	19,675	17,275	14,631	5,578	4,575
12	26,217	21,026	18,549	15,812	6,304	5,226
13	27,688	22,362	19,812	16,985	7,041	5,892
14	29,141	23,685	21,064	18,151	7,790	6,571
15	30,578	24,996	22,307	19,311	8,547	7,261
16	32,000	26,296	23,542	20,465	9,312	7,962
17	33,409	27,587	24,769	21,615	10,085	8,672
18	34,805	28,869	25,989	22,760	10,865	9,390
19	36,191	30,144	27,204	23,900	11,651	10,117
20	37,566	31,410	28,412	25,038	12,443	10,851
21	38,932	32,671	29,615	26,171	13,240	11,591
22	40,289	33,924	30,813	27,301	14,041	12,338
23	41,638	35,172	32,007	28,429	14,848	13,091
24	42,980	36,415	33,196	29,553	15,659	13,848
25	44,314	37,652	34,382	30,675	16,473	14,611
26	45,642	38,885	35,563	31,795	17,292	15,379
27	46,963	40,113	36,741	32,912	18,114	16,151
28	48,278	41,337	37,916	34,027	18,939	16,928
29	49,588	42,557	39,087	35,139	19,768	17,708
30	50,892	43,773	40,256	36,250	20,599	18,493
35	57,342	49,802	46,059	41,778	24,797	22,465
40	63,691	55,758	51,805	47,269	29,051	26,509
50	76,154	67,505	63,167	58,164	37,689	34,764
60	88,379	79,082	74,397	68,972	46,459	43,188
70	100,425	90,531	85,527	79,715	55,329	51,739
80	112,329	101,879	96,578	90,405	64,278	60,391
90	124,116	113,145	107,565	101,054	73,291	69,126
100	135,807	124,342	118,498	111,667	82,358	77,929