621.01(07)
О-55

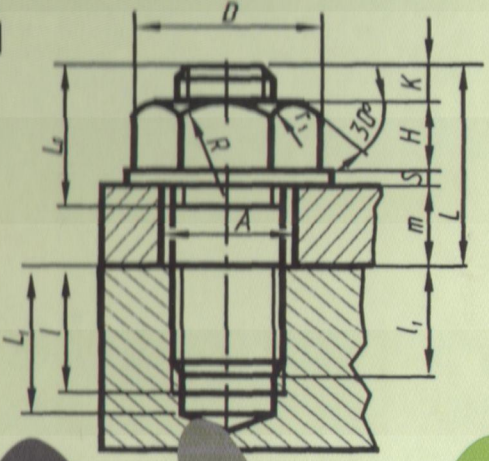
ФОРУМ

Профессиональное образование

В.П. Олофинская

Техническая механика

Курс лекций с вариантами практических и тестовых заданий



механика

В. П. Олофинская

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Курс лекций с вариантами
практических и тестовых заданий

2-е издание исправленное

*Допущено Министерством образования
Российской Федерации в качестве учебного пособия
для студентов учреждений среднего профессионального образования,
обучающихся по специальностям технического профиля*

Москва
ФОРУМ — ИНФРА-М
2007

УДК 621.01(075)
ББК 30.12я723
О53

Рецензенты:
преподаватель Московского колледжа
авиационного мотостроения *Е. М. Соломатина*;
директор Государственного образовательного учреждения
«Электромеханический техникум» *Р. Н. Протопопов*

Олофинская В.П.
О53 Техническая механика: Курс лекций с вариантами практических и тестовых заданий: Учебное пособие. — 2-е изд. — М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2007. — 349 с. — (Профессиональное образование).

ISBN 978-5-91134-114-5 (ФОРУМ)
ISBN 978-5-16-002993-1 (ИНФРА-М)

Предлагаемая книга представляет курс лекций по двум разделам технической механики — «теоретическая механика» и «сопротивление материалов». Каждый раздел содержит варианты практических занятий по основным темам. Данное учебное пособие можно использовать для самостоятельного изучения дисциплины «Техническая механика», в частности при заочном обучении, а также при подготовке к экзаменам и контрольным работам.

Учебное пособие написано в соответствии с государственным образовательным стандартом, [redacted] студентов техникумов и колледжей, а также может быть рекомендовано студентам вузов.

УДК 621.01(075)
ББК 30.12я723

ISBN 978-5-91134-114-5 (ФОРУМ)
ISBN 978-5-16-002993-1 (ИНФРА-М)
© В. П. Олофинская, 2003, 2007
© Издательство «ФОРУМ», 2003, 2007

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебная дисциплина «Техническая механика» состоит из трех разделов: «Теоретическая механика», «Сопротивление материалов» и «Детали машин».

В некоторых учебных заведениях раздел «Детали машин» изучается отдельно.

Автором ставилась задача в сжатой и доступной форме изложить основные положения «Теоретической механики» и «Сопротивления материалов» в соответствии с новыми государственными требованиями к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников групп технических специальностей.

Объем представленного материала соответствует Примерной программе дисциплины «Техническая механика» для групп с объемом 180 учебных часов, утвержденной Управлением среднего профессионального образования Минобразования России 04.06.2002 г. Для групп с меньшим объемом учебных часов можно выбрать необходимый материал в соответствии с Примерными программами дисциплины для запланированного количества учебных часов и приведенного уровня требований.

В начале каждой лекции приводятся требования к уровню подготовки по изложенному материалу согласно Примерной программе по дисциплине.

Для закрепления знаний представлен материал для практических занятий и расчетно-графических работ по основным темам, приведено значительное количество примеров решения типовых задач.

Представленные образцы тестовых опросных карт соответствуют тестам, изданным в сборнике тестовых заданий «Техническая механика» (М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2002).

Издание содержит многовариантные задачи для расчетно-графических работ, которые могут выполняться на практических занятиях или выдаваться в качестве домашних заданий. В Приложениях приведены необходимые справочные данные.

Конспект лекций по технической механике будет особенно полезен при самостоятельной работе над курсом при заочной форме обучения, благодаря простой и доступной форме изложения, большому количеству примеров решения задач и возможности проконтролировать себя с помощью тестовых заданий. Тестовые задания и некоторые контрольные вопросы снабжены ответами.

РАЗДЕЛ I

Теоретическая механика

ЛЕКЦИЯ 1

Тема 1.1. Основные понятия и аксиомы статики

Введение

Техническая механика — комплексная дисциплина. Она включает три раздела: «Теоретическая механика», «Сопротивление материалов», «Детали машин». «Теоретическая механика» — раздел, в котором излагаются основные законы движения твердых тел и их взаимодействия. В разделе «Сопротивление материалов» изучаются основы прочности материалов и методы расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость под действием внешних сил. В заключительном разделе «Технической механики» «Детали машин» рассматриваются основы конструирования и расчета деталей и сборочных единиц общего назначения.

Дисциплина «Техническая механика» является общепрофессиональной, обеспечивающей базовые знания при усвоении специальных дисциплин, изучаемых в дальнейшем.

Задачи теоретической механики

Теоретическая механика — наука о механическом движении материальных твердых тел и их взаимодействии. Механическое движение понимается как перемещение тела в пространстве и во времени по отношению к другим телам, в частности к Земле.

Для удобства изучения теоретическую механику подразделяют на статику, кинематику и динамику.

Статика изучает условия равновесия тел под действием сил.

Кинематика рассматривает движение тел как перемещение в пространстве; характеристики тел и причины, вызывающие движение, не рассматриваются.

Динамика изучает движение тел под действием сил.

В отличие от физики теоретическая механика изучает законы движения некоторых абстрактных *абсолютно твердых тел*: здесь материалы, форма тел существенного значения не имеют. При движении абсолютно твердое тело не деформируется и не разрушается. В случае, когда размерами тела можно пренебречь, тело заменяют материальной точкой. Это упрощение, принятое в теоретической механике, значительно облегчает решение задач о движении.

Понятие о силе и системе сил

Сила — это мера механического взаимодействия материальных тел между собой. Взаимодействие характеризуется величиной и направлением, т. е. сила есть *величина векторная*[1], характеризующаяся точкой приложения (A), направлением (линией действия), величиной (модулем) (рис. 1.1). Силу измеряют в ньютонах,

$$1\,\text{Н} = 1\,\text{кг} \cdot \text{м/с}^2.$$

Силы, действующие на тело (или систему тел), делятся на *внешние и внутренние*. Внешние силы бывают активные и реактивные. *Активные силы* вызывают перемещение тела, *реактивные* стремятся противодействовать перемещению тела под действием внешних сил.

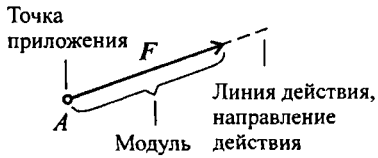


Рис. 1.1

Внутренние силы возникают в теле под действием внешних сил.

Совокупность сил, действующих на какое-либо тело, называют *системой сил*.

Эквивалентная система сил — система сил, действующая так же, как заданная.

Уравновешенной (эквивалентной нулю) системой сил называется такая система, которая, будучи приложенной к телу, не изменяет его состояния.

Систему сил, действующих на тело, можно заменить одной *равнодействующей*, действующей так, как система сил.

Аксиомы статики

В результате обобщения человеческого опыта были установлены общие закономерности механического движения, выраженные в

[1] Векторные величины обозначаются полужирным шрифтом, скалярные величины — обычным.

виде законов и теорем. Все теоремы и уравнения статики выводятся из нескольких исходных положений. Эти положения называют аксиомами статики.

Первая аксиома

Под действием уравновешенной системы сил абсолютно твердое тело или материальная точка находятся в равновесии или движутся равномерно и прямолинейно (закон инерции).

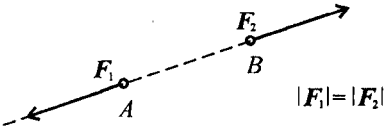


Рис. 1.2

Вторая аксиома

Две силы, равные по модулю и направленные по одной прямой в разные стороны, уравновешиваются (рис. 1.2).

Третья аксиома

Не нарушая механического состояния тела, можно добавить или убрать уравновешенную систему сил (принцип отбрасывания системы сил, эквивалентной нулю) (рис. 1.3).

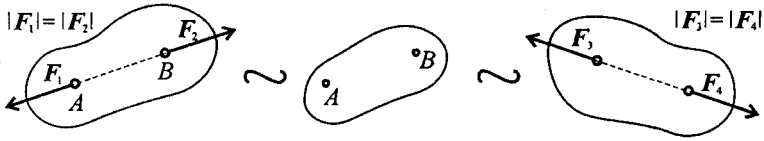


Рис. 1.3

Четвертая аксиома (правило параллелограмма сил)

Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, приложена в той же точке и является диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах (рис. 1.4).

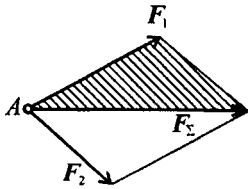


Рис. 1.4

Вместо *параллелограмма* можно построить *треугольник* сил: силы вычерчивают одну за другой в любом порядке; равнодействующая двух сил соединяет начало первой силы с концом второй.

Пятая аксиома

При взаимодействии тел всякому действию соответствует рав-

ное и противоположно направленное противодействие (рис. 1.5).

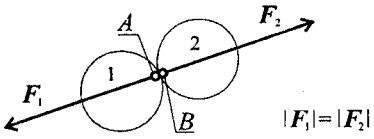


Рис. 1.5

Силы действующие и противодействующие всегда приложены к разным телам, поэтому они не уравновешиваются.

Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, всегда равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в разные стороны.

Следствие из второй и третьей аксиом

Силу, действующую на твердое тело, можно перемещать вдоль линии ее действия (рис. 1.6).

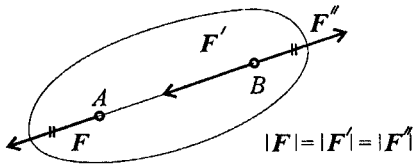


Рис. 1.6

Сила $\boldsymbol{F}$ приложена в точке A. Требуется перенести ее в точку B. Используя третью аксиому, добавим в точке B уравновешенную систему сил $(\boldsymbol{F}'; \boldsymbol{F}'')$. Образуется уравновешенная по второй аксиоме система сил $(\boldsymbol{F}; \boldsymbol{F}'')$. Убираем ее и получим в точке B силу $\boldsymbol{F}''$, равную заданной $\boldsymbol{F}$.

Связи и реакции связей

Все законы и теоремы статики справедливы для свободного твердого тела.

Все тела делятся на свободные и связанные.

Свободные тела — тела, перемещение которых не ограничено.

Связанные тела — тела, перемещение которых ограничено другими телами.

Тела, ограничивающие перемещение других тел, называют *связями.*

Силы, действующие от связей и препятствующие перемещению, называют *реакциями связей.*

Реакция связи всегда направлена с той стороны, *куда нельзя перемещаться.*

Всякое связанное тело можно представить свободным, если

связи заменить их реакциями (*принцип освобождения от связей*).

Все связи можно разделить на несколько типов.

Связь — гладкая опора (без трения)

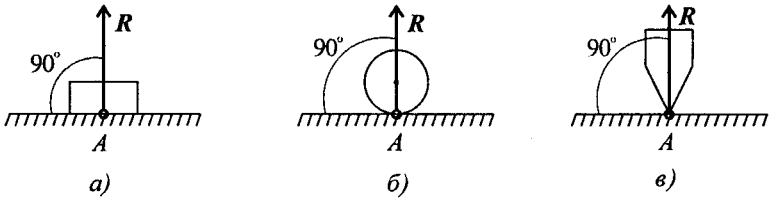


Рис. 1.7

Реакция опоры приложена в точке опоры и всегда направлена перпендикулярно опоре (рис. 1.7).

Гибкая связь (нить, веревка, трос, цепь)

Груз подвешен на двух нитях (рис. 1.8).

Реакция нити направлена вдоль нити от тела, при этом нить может быть только растянута.

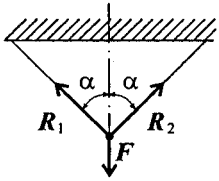


Рис. 1.8

Жесткий стержень

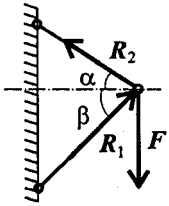


Рис. 1.9

На схемах стержни изображают толстой сплошной линией (рис. 1.9).

Стержень может быть сжат или растянут. Реакция стержня направлена вдоль стержня. Стержень работает на растяжение или сжатие. Точное направление реакции определяют, мысленно убрав стержень и рассмотрев возможные перемещения тела без этой связи.

Возможным перемещением точки называется такое бесконечно малое мысленное перемещение, которое допускается в данный момент наложенными на него связями.

Убираем стержень 1, в этом случае стержень 2 падает вниз. Следовательно, сила от стержня 1 (реакция) направлена вверх. Убираем стержень 2. В этом случае точка A опускается вниз, отодвигаясь от стены. Следовательно, реакция стержня 2 направлена к стене.

Шарнирная опора

Шарнир допускает поворот вокруг точки закрепления. Различают два вида шарниров.

Подвижный шарнир

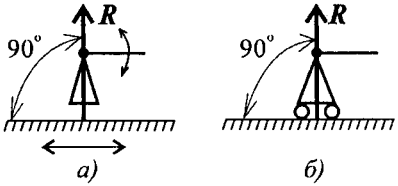


Рис. 1.10

Стержень, закрепленный на шарнире, может поворачиваться вокруг шарнира, а точка крепления может перемещаться вдоль направляющей (площадки) (рис. 1.10).

Реакция подвижного шарнира направлена перпендикулярно опорной поверхности, т. к. не допускается только перемещение поперек опорной поверхности.

Неподвижный шарнир

Точка крепления перемещаться не может. Стержень может свободно поворачиваться вокруг оси шарнира. Реакция такой опоры проходит через ось шарнира, но неизвестна по направлению. Ее принято изображать в виде двух составляющих: горизонтальной и вертикальной ($\boldsymbol{R}_x$; $\boldsymbol{R}_y$) (рис. 1.11).

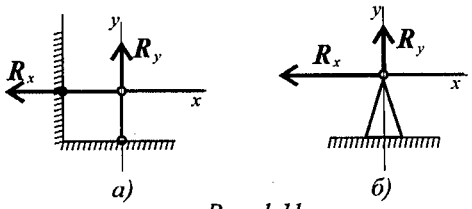


Рис. 1.11

Защемление или «заделка»

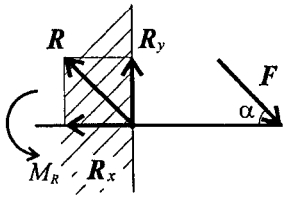


Рис. 1.12

Любые перемещения точки крепления невозможны.

Под действием внешних сил в опоре возникают реактивная сила и реактивный момент M_R, препятствующий повороту (рис. 1.12).

Реактивную силу принято представлять в виде двух составляющих вдоль осей координат

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_x + \boldsymbol{R}_y.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Груз подвешен на стержнях и канатах и находится в равновесии (рис. 1.13). Изобразить систему сил, действующих на шарнир A.

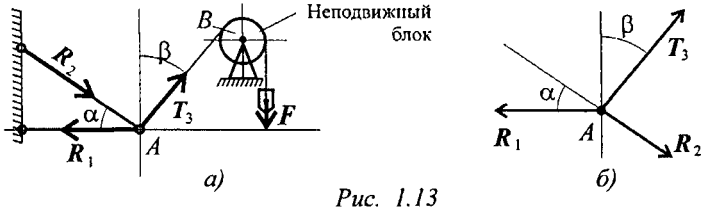


Рис. 1.13

Решение

1. Реакции стержней направлены вдоль стержней, реакции гибких связей направлены вдоль нитей в сторону натяжения (рис. 1.13а).

2. Для определения точного направления усилий в стержнях мысленно убираем последовательно стержни 1 и 2. Анализируем возможные перемещения точки A.

Неподвижный блок с действующими на него силами не рассматриваем.

3. Убираем стержень 1, точка A поднимается и отходит от стены, следовательно, реакция стержня 1 направлена к стене.

4. Убираем стержень 2, точка A поднимается и приближается к стене, следовательно, реакция стержня 2 направлена от стены вниз.

5. Канат тянет вправо.

6. Освобождаемся от связей (рис. 1.13б).

Пример 2. Шар подвешен на нити и опирается на стену (рис. 1.14а). Определить реакции нити и гладкой опоры (стенки).

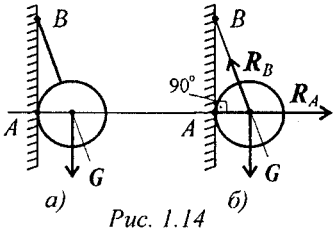


Рис. 1.14

Решение

1. Реакция нити — вдоль нити к точке B вверх (рис. 1.14б).

2. Реакция гладкой опоры (стенки) — по нормали от поверхности опоры.

Контрольные вопросы и задания

1. Какая из приведенных систем сил (рис. 1.15) уравновешена?

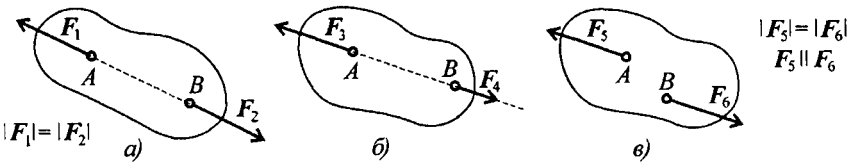


Рис. 1.15

2. Какие силы системы (рис. 1.16) можно убрать, не нарушая механического состояния тела?

Рис. 1.16

3. Тела 1 и 2 (рис. 1.17) находятся в равновесии. Можно ли убрать действующие системы сил, если тела абсолютно твердые? Что изменится, если тела реальные, деформируемые?

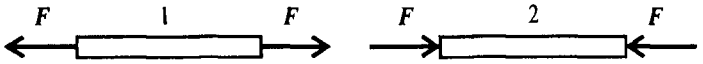


Рис. 1.17

4. Укажите возможное направление реакций в опорах (рис. 1.18).

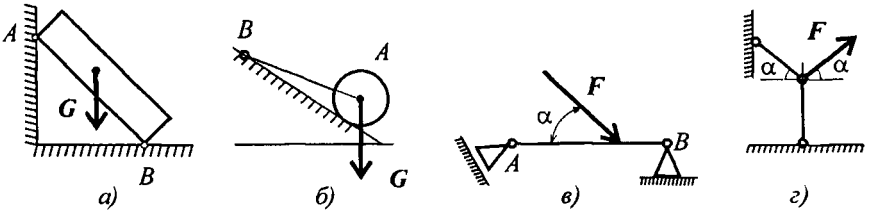


Рис. 1.18

ЛЕКЦИЯ 2

Тема 1.2. Плоская система сходящихся сил. Определение равнодействующей геометрическим способом

Знать геометрический способ определения равнодействующей системы сил, условия равновесия плоской системы сходящихся сил.

Уметь определять равнодействующую, решать задачи на равновесие в геометрической форме.

Плоская система сходящихся сил

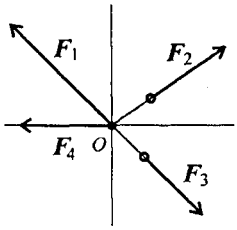


Рис. 2.1

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется *сходящейся* (рис. 2.1).

Необходимо определить равнодействующую системы сходящихся сил ($\boldsymbol{F}_1; \boldsymbol{F}_2; \boldsymbol{F}_3; \ldots$ $\ldots; \boldsymbol{F}_n$), n — число сил, входящих в систему.

По следствию из аксиом статики, все силы системы можно переместить вдоль линии действия, и все силы окажутся приложенными в одной точке.

Равнодействующая сходящихся сил

Равнодействующую двух пересекающихся сил можно определить с помощью параллелограмма или треугольника сил (4-я аксиома) (рис. 2.2).

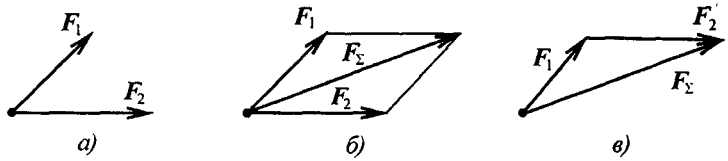


Рис. 2.2

Используя свойства векторной суммы сил, можно получить равнодействующую любой сходящейся системы сил, складывая последо-

вательно силы, входящие в систему. Образуется многоугольник сил (рис. 2.3). Вектор равнодействующей силы соединит начало первого вектора с концом последнего.

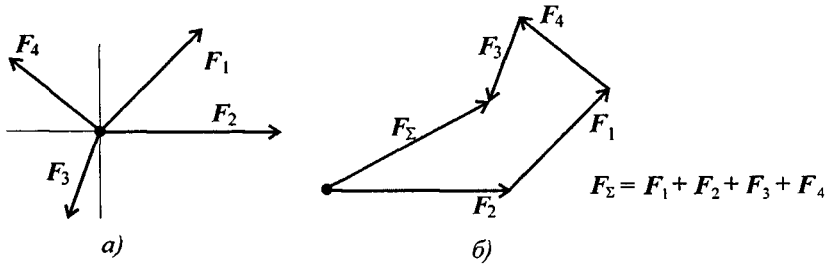


Рис. 2.3

При графическом способе определения равнодействующей векторы сил можно вычерчивать в любом порядке, результат (величина и направление равнодействующей) при этом не изменится.

Вектор равнодействующей направлен *навстречу* векторам сил-слагаемых. Такой способ получения равнодействующей называют геометрическим.

З а м е ч а н и е. При вычерчивании многоугольника обращать внимание на параллельность сторон многоугольника соответствующим векторам сил.

Порядок построения многоугольника сил

1. Вычертить векторы сил заданной системы в некотором масштабе один за другим так, чтобы конец предыдущего вектора совпадал с началом последующего.

2. Вектор равнодействующей замыкает полученную ломаную линию; он соединяет начало первого вектора с концом последнего и направлен ему навстречу.

3. При изменении порядка вычерчивания векторов в многоугольнике меняется *вид* фигуры. *На результат порядок вычерчивания не влияет.*

Условие равновесия плоской системы сходящихся сил

При равновесии системы сил равнодействующая должна быть равна нулю, следовательно, при геометрическом построении конец последнего вектора должен *совпасть* с началом первого.

Если плоская система сходящихся сил находится в равновесии,

многоугольник сил этой системы должен быть замкнут.

Если в системе три силы, образуется треугольник сил.

Сравните два треугольника сил (рис. 2.4) и сделайте вывод о количестве сил, входящих в каждую систему.

Р е к о м е н д а ц и я. Обратить внимание на направление векторов.

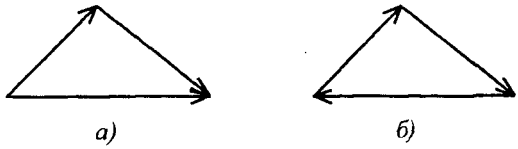


Рис. 2.4

Решение задач на равновесие геометрическим способом

Геометрическим способом удобно пользоваться, если в системе три силы. При решении задач на равновесие тело считать абсолютно твердым (отвердевшим).

Порядок решения задач:

1. Определить возможное направление реакций связей.

2. Вычертить многоугольник сил системы, начиная с известных сил в некотором масштабе. (Многоугольник должен быть замкнут, все векторы-слагаемые направлены в одну сторону по обходу контура.)

3. Измерить полученные векторы сил и определить их величину, учитывая выбранный масштаб.

4. Для уточнения решения рекомендуется определить величины векторов (сторон многоугольника) с помощью геометрических зависимостей.

Пример 1. Груз подвешен на стержнях и находится в равновесии. Определить усилия в стержнях (рис. 2.5а).

Решение

1. Усилия, возникающие в стержнях крепления, по величине равны силам, с которыми стержни поддерживают груз (5-я аксиома статики) (рис. 2.5а).

Определяем возможные направления реакций связей «жесткие стержни».

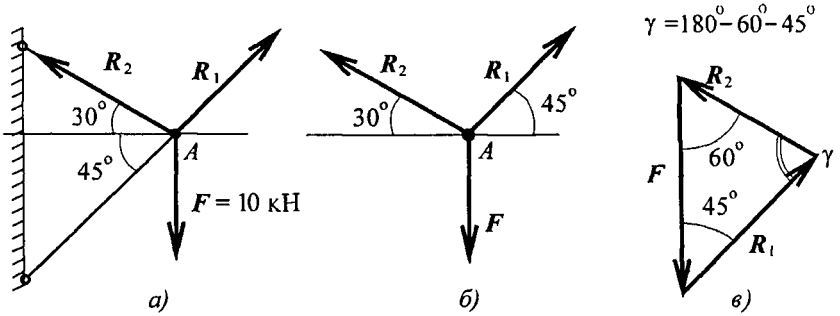


Рис. 2.5

Усилия направлены вдоль стержней.

2. Освободим точку A от связей, заменив действие связей их реакциями (рис. 2.5б).

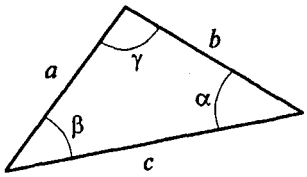
3. Система находится в равновесии. Построим треугольник сил.

Построение начнем с известной силы, вычертив вектор $\boldsymbol{F}$ в некотором масштабе.

Из концов вектора $\boldsymbol{F}$ проводим линии, параллельные реакциям $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$.

Пересекаясь, линии создадут треугольник (рис. 2.5в). Зная масштаб построений и измерив длину сторон треугольника, можно определить величину реакций в стержнях.

4. Для более точных расчетов можно воспользоваться геометрическими соотношениями, в частности теоремой синусов: отношение стороны треугольника к синусу противоположного угла — величина постоянная $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.



Для данного случая:

$$\frac{F}{\sin 75^\circ} = \frac{R_1}{\sin 60^\circ} = \frac{R_2}{\sin 45^\circ};$$

$$\frac{R_1}{\sin 60^\circ} = \frac{F}{\sin 75^\circ}; \quad R_1 = \frac{F \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ};$$

$$R_1 = \frac{10 \cdot 0{,}866}{0{,}966} = 9\,\text{кН};$$

$$\frac{R_2}{\sin 45^\circ} = \frac{F}{\sin 75^\circ}; \quad R_2 = \frac{F \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}; \quad R_2 = \frac{10 \cdot 0{,}707}{0{,}966} = 7{,}3\,\text{кН}.$$

З а м е ч а н и е. Если направление вектора (реакции связи) на заданной схеме и в треугольнике сил не совпало, значит, реакция на схеме должна быть направлена в противоположную сторону.

Пример 2. Груз подвешен на стержнях и канатах и находится в равновесии. Определить усилия в стержнях (рис. 2.6а).

Решение

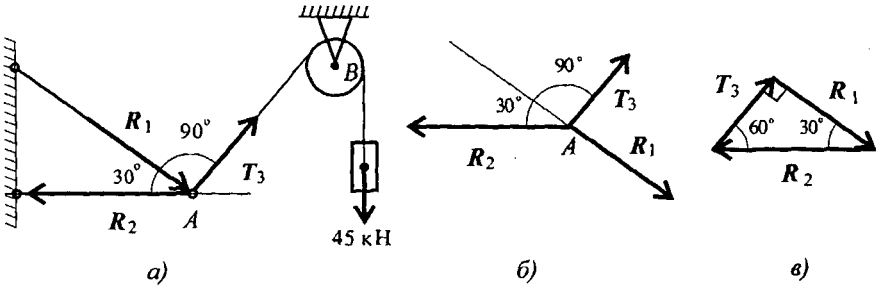


Рис. 2.6

1. Нанесем на схему возможные направления усилий, приложенных в точке A. Реакции стержней — вдоль стержней, усилие от каната — вдоль каната от точки A к точке B.

2. Груз находится в равновесии, следовательно, в равновесии находится точка A, в которой пересекаются три силы.

Освободим точку A от связей и рассмотрим ее равновесие (рис. 2.6б).

З а м е ч а н и е. Рассмотрим только силы, приложенные к точке A. Груз растягивает канат силой 45 кН по всей длине, поэтому усилие от каната известно: $T_3 = 45$ кН.

3. Строим треугольник для сил, приложенных в точке A, начиная с известной силы T_3. Стороны треугольника параллельны предполагаемым направлениям сил, приложенных в точке A.

Образовался прямоугольный треугольник (рис. 2.6в).

4. Неизвестные реакции стержней можно определить из соотношений в прямоугольном треугольнике:

$$T_3 = 45\,\text{кН}; \quad R_2 = \frac{T_3}{\sin 30^\circ}; \quad R_2 = 90\,\text{кН};$$

$$R_1 = R_2 \sin 60^\circ; \quad R_1 = 90 \cdot 0{,}866 \cong 78\,\text{кН}.$$

З а м е ч а н и е. При равновесии векторы сил в треугольнике направлены один за другим (обходим треугольник по часовой стрелке). Сравним направления сил в треугольнике с принятыми в начале расчета на рис. 1.26а. Направления совпали, следовательно, направления реакций определены верно.

Контрольные вопросы и задания

1. По изображенным многоугольникам сил (рис. 2.7) решите, сколько сил входит в каждую систему и какая из них уравновешена. (Обратить внимание на направление векторов.)

а) б)

Рис. 2.7

2. Из представленных силовых треугольников выберете треугольник, построенный для точки A (рис. 2.8, 2.9).

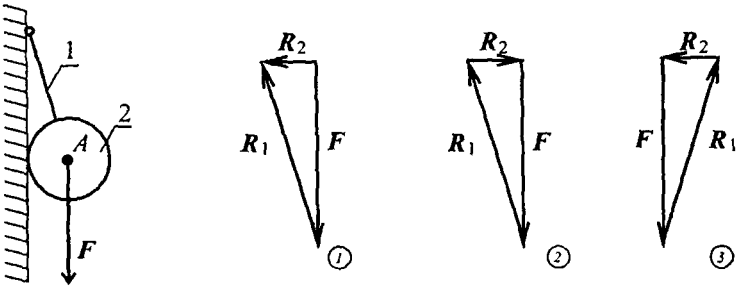


Рис. 2.8

Шар подвешен на нити и находится в равновесии. Обратить внимание на направление реакции от гладкой опоры и условие равновесия шара (рис. 2.8).

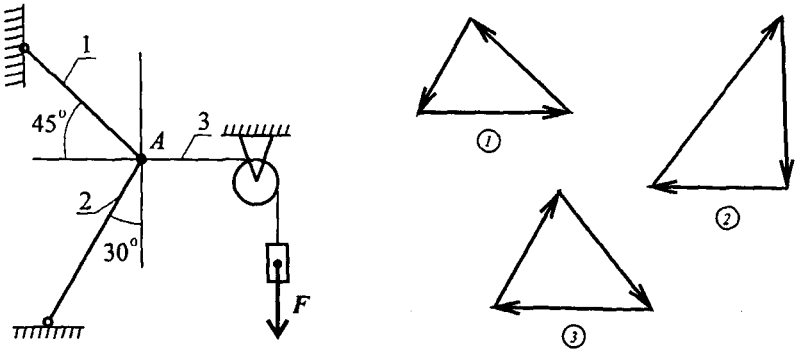


Рис. 2.9

Груз F подвешен на канате и находится в равновесии. Обратить внимание на реакции, приложенные к точке A. Силы, не приложенные к точке A, не рассматриваются. Не забывать об условии равновесия системы сил (рис. 2.9).

ЛЕКЦИЯ 3

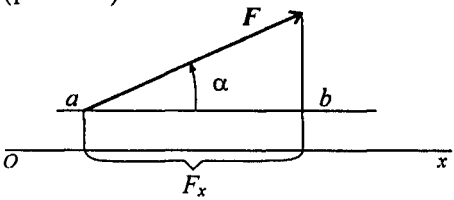
Тема 1.2. Плоская система сходящихся сил. Определение равнодействующей аналитическим способом

Знать аналитический способ определения равнодействующей силы, условия равновесия плоской сходящейся системы сил в аналитической форме.

Уметь определять проекции силы на две взаимно перпендикулярные оси, решать задачи на равновесие в аналитической форме.

Проекция силы на ось

Проекция силы на ось определяется отрезком оси, отсекаемым перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора (рис. 3.1).



$$\boxed{F_x = F\cos\alpha.}$$

Рис. 3.1

Величина проекции силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между вектором силы и *положительным направлением* оси. Таким образом, проекция имеет знак: *положительный при одинаковом направлении* вектора силы и оси и *отрицательный* при направлении *в сторону отрицательной полуоси* (рис. 3.2).

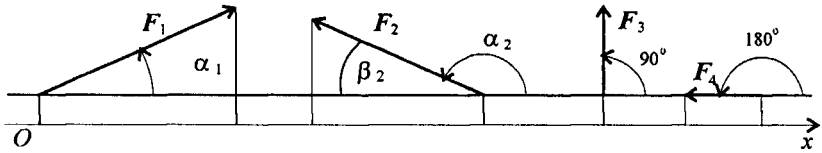


Рис. 3.2

$$F_{1x} = F_1 \cos\alpha_1 > 0; \quad F_{2x} = F_2 \cos\alpha_2 = -F_2 \cos\beta_2;$$

$$\cos\alpha_2 = \cos(180^\circ - \beta_2) = -\cos\beta_2$$

$$F_{3x} = F_3 \cos 90^\circ = 0; \quad F_{4x} = F_4 \cos 180^\circ = -F_4.$$

Проекция силы на две взаимно перпендикулярные оси (рис. 3.3).

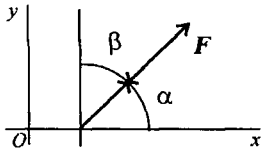


Рис. 3.3

$$F_x = F\cos\alpha > 0;$$

$$F_y = F\cos\beta = F\sin\alpha > 0.$$

Определение равнодействующей системы сил аналитическим способом

Величина равнодействующей равна векторной (геометрической) сумме векторов системы сил. Определяем равнодействующую геометрическим способом. Выберем систему координат, определим проекции всех заданных векторов на эти оси (рис. 3.4а). Складываем проекции всех векторов на оси x и y (рис. 3.4б).

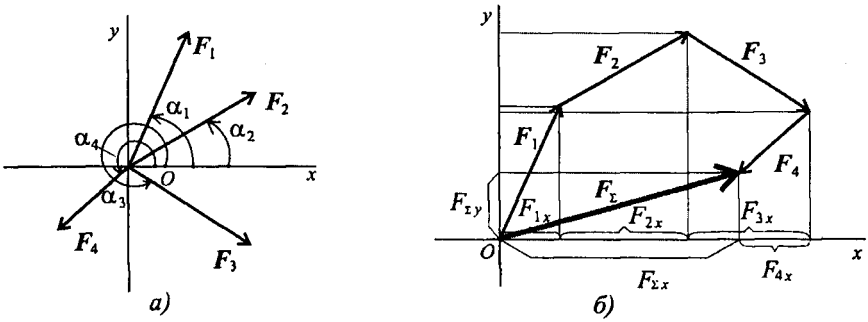


Рис. 3.4

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}; \quad F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y};$$

$$F_{\Sigma x} = \sum_0^n F_{kx}; \quad F_{\Sigma y} = \sum_0^n F_{ky}.$$

Модуль (величину) равнодействующей можно найти по известным проекциям:

$$F_\Sigma = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}.$$

Направление вектора равнодействующей можно определить по величинам и знакам косинусов углов, образуемых равнодействующей с осями координат (рис. 3.5).

$$\cos\alpha_x = \frac{F_{\Sigma x}}{F_\Sigma};$$

$$\cos\alpha_y = \frac{F_{\Sigma y}}{F_\Sigma}.$$

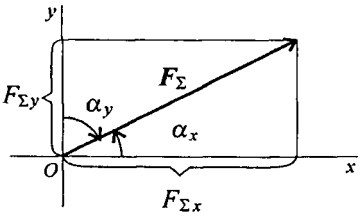


Рис. 3.5

Условия равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме

Исходя из того, что равнодействующая равна нулю, получим:

$$F_\Sigma = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2} \Longrightarrow \begin{matrix} F_{\Sigma x} = \sum F_{kx} = 0; \\ F_{\Sigma y} = \sum F_{ky} = 0. \end{matrix}$$

$$F_\Sigma = 0.$$

Условия равновесия в аналитической форме можно сформулировать следующим образом:

Плоская система сходящихся сил находится в равновесии, если алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось равна нулю.

Система уравнений равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\begin{cases} \sum\limits_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum\limits_0^n F_{ky} = 0. \end{cases}$$

В задачах координатные оси выбирают так, чтобы решение было наиболее простым. Желательно, чтобы хотя бы одна неизвестная сила совпадала с осью координат.

Пример 1. Определить величины и знаки проекций представленных на рис. 3.6 сил.

Решение

$$F_{1x} = F_1 \cos\alpha_1; \quad F_{1x} = -F_1 \cos 0° < 0;$$
$$F_{1y} = F_1 \cos\beta_1; \quad F_{1y} = F_1 \cos 90° = 0;$$

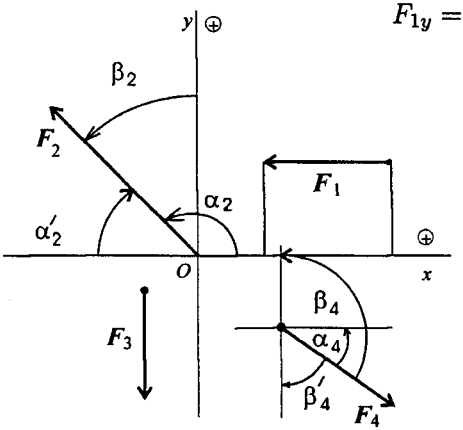


Рис. 3.6

$$F_{2x} = F_2 \cos\alpha_2 = -F_2 \cos\alpha_2';$$

$$\alpha_2' = 180° - \alpha_2; \quad F_{2x} < 0;$$

$$F_{2y} = F_2 \cos\beta_2 > 0;$$

$$F_{3x} = F_3 \cos 90° = 0;$$

$$F_{3y} = F_3 \cos\beta_3 = F_3 \cos 180°;$$

$$F_{3y} = -F_3 < 0;$$

$$F_{4x} = F_4 \cos\alpha_4 > 0;$$

$$F_{4y} = F_4 \cos\beta_4 = -F_4 \cos\beta_4';$$

$$F_{4y} < 0.$$

Пример 2. Определить величину и направление равнодействующей плоской системы сходящихся сил аналитическим способом.

Решение

1. Определяем проекции всех сил системы на Ox (рис. 3.7а):

$$F_{1x} = 10 \cdot \cos 30°;$$
$$F_{1x} = 10 \cdot 0{,}866 = 8{,}66\,\text{кН};$$
$$F_{2x} = 20 \cdot \cos 180° = -20\,\text{кН};$$
$$F_{3x} = 15 \cdot \cos 45°;$$
$$F_{3x} = 15 \cdot 0{,}707 = 10{,}6\,\text{кН}.$$

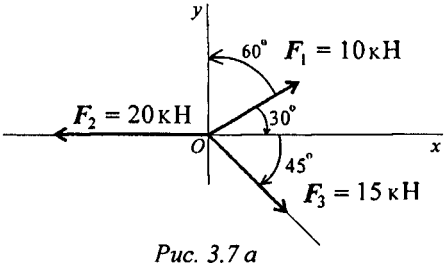


Рис. 3.7 а

Сложив алгебраически проекции, получим проекцию равнодействующей на ось Ox.

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x};$$

$$F_{\Sigma x} = 8{,}66 - 20 + 10{,}6 = -0{,}735\,\text{кН}.$$

Знак говорит о том, что равнодействующая направлена влево.

2. Определяем проекции всех сил на ось Oy значения проекций, получим величину проекции Oy.

$$F_{1y} = 10 \cdot \cos 60^\circ; \quad F_{1y} = 10 \cdot 0{,}5 = 5\,\text{кН};$$

$$F_{2y} = 20 \cdot \cos 90^\circ = 0;$$

$$F_{3y} = 15 \cdot \cos 135^\circ; \quad F_{3y} = -15 \cdot 0{,}707 = -10{,}6\,\text{кН}.$$

Сложив алгебраически значения проекций, получим величину проекции равнодействующей на ось Oy.

$$F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y};$$

$$F_{\Sigma y} = 5 - 10{,}6\,\text{кН} = -5{,}6\,\text{кН}.$$

Знак проекции соответствует направлению вниз. Следовательно, равнодействующая направлена влево и вниз (рис. 3.7б).

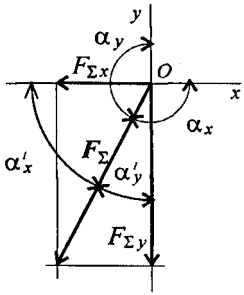


Рис. 3.7б

3. Определяем модуль равнодействующей по величинам проекций:

$$F_\Sigma = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2};$$

$$F_\Sigma = \sqrt{0{,}735^2 + 5{,}6^2} = 5{,}65\,\text{кН}.$$

4. Определяем значение угла равнодействующей с осью Ox:

$$\cos\alpha_x = \frac{F_{\Sigma x}}{F_\Sigma}; \quad \cos\alpha_x = \frac{-0{,}735}{5{,}65} = -0{,}13; \quad \alpha'_x = 82^\circ 30'$$

и значение угла с осью Oy:

$$\cos\alpha_y = \frac{F_{\Sigma y}}{F_\Sigma}; \quad \cos\alpha_y = \frac{-5{,}6}{5{,}65} = -0{,}991; \quad \alpha'_y = 7^\circ 30';$$

$$\alpha_x = 180^\circ - \alpha'_x = 97^\circ 30'; \quad \alpha_y = 180^\circ - \alpha'_y = 172^\circ 30'.$$

Пример 3. Система трех сил находится в равновесии. Известны проекции двух сил системы на взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy:

$$F_{1x} = 10\,\text{кН}; \quad F_{2x} = 5\,\text{кН};$$
$$F_{1y} = -2\,\text{кН}; \quad F_{2y} = 6\,\text{кН}.$$

Определить, чему равна и как направлена третья сила системы.

Решение

1. Из уравнений равновесия системы определяем:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0; \quad 10 + 5 + F_{3x} = 0; \quad F_{3x} = -15\,\text{кН}.$$
$$\sum F_{ky} = 0; \quad F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0; \quad -2 + 6 + F_{3y} = 0; \quad F_{3y} = -4\,\text{кН}.$$

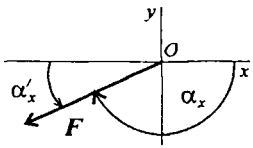


Рис. 3.8

2. По полученным величинам проекций определяем модуль силы:

$$F_3 = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2}; \quad F_3 = \sqrt{15^2 + 4^2} = 15{,}52\,\text{кН}.$$

3. Направление вектора силы относительно оси Ox (рис. 3.8):

$$\cos\alpha_x = \frac{F_{3x}}{F_3}; \quad \cos\alpha_x = -\frac{15}{15{,}52} = -0{,}966 \Longrightarrow \alpha'_x = 14^\circ 50'.$$

Угол с осью Ox будет равен

$$\alpha_x = 180^\circ - \alpha'_x = 165^\circ 10'.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите выражение для расчета проекции силы $\boldsymbol{F}$ на ось Oy (рис. 3.9).

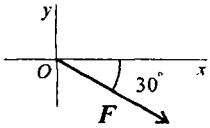


Рис. 3.9

2. Определите сумму проекций сил системы на ось Ox (рис. 3.10).

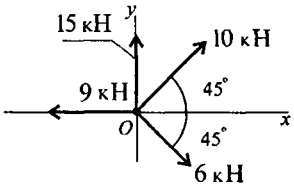


Рис. 3.10

3. Определите величину силы по известным проекциям:

$$F_x = 3\,\text{кН}; \quad F_y = 4\,\text{кН}.$$

4. Груз находится в равновесии (рис. 3.11). Какая система уравнений равновесия для шарнира A записана верно?

$$\begin{cases} \sum\limits_0^n F_{kx} = R_1 \cos 30^\circ - R_2 \cos 60^\circ - F = 0; \\ \sum\limits_0^n F_{ky} = R_1 \cos 60^\circ + R_2 \cos 30^\circ = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_0^n F_{kx} = R_1 \cos 60^\circ - R_2 \cos 30^\circ = 0; \\ \sum\limits_0^n F_{ky} = R_1 \cos 60^\circ + R_2 \cos 60^\circ + F = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_0^n F_{kx} = -R_1 \cos 30^\circ + R_2 \cos 60^\circ = 0; \\ \sum\limits_0^n F_{ky} = R_1 \cos 60^\circ + R_2 \cos 30^\circ - F = 0. \end{cases} \quad (3)$$

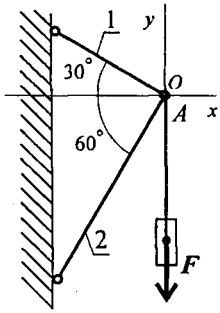


Рис. 3.11

Указания.

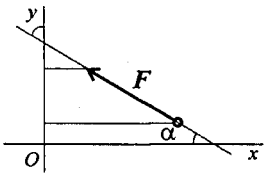
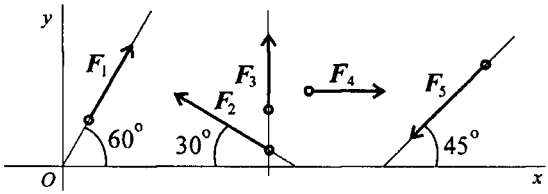
1. При ответе на вопросы 1 и 2 необходимо знать, что в выражение для величины проекции силы на ось подставляется угол между вектором силы и положительной полуосью координат. Не забыть, что определяется алгебраическая сумма.

2. При ответе на вопрос 4 сначала следует определить возможные направления реакций в стержнях, мысленно убирая по очереди

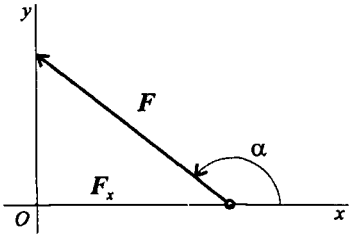
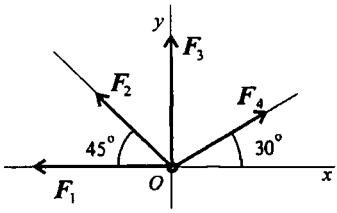
стержни и рассматривая возможные перемещения (см. лекцию 1). Затем записать алгебраические суммы проекций сил на оси Ox и Oy. Полученные уравнения сравнить с приведенными.

5. Ответьте на вопросы тестового задания.

Тема 1.2. Статика. Проекции силы на ось

Вопросы	Ответы	Код
1. Выбрать выражение для расчета проекции силы $\boldsymbol{F}$ на ось Oy. 	$F\cos\alpha$	1
	$F\cos(180^\circ - \alpha)$	2
	$F\sin\alpha$	3
	$-F\cos\alpha$	4
2. Выбрать выражение для расчета проекции силы $\boldsymbol{F}_2$ на ось Ox. 	$F_2\cos 30^\circ$	1
	$F_2\cos 150^\circ$	2
	$F_2\cos 60^\circ$	3
	$-F_2\cos 150^\circ$	4
3. Рассчитать сумму проекций всех сил системы на ось Oy (см. рис. к вопросу 2), если $F_1 = 28$ кН, $F_2 = 15$ кН, $F_3 = 8$ кН, $F_4 = 24$ кН, $F_5 = 30$ кН.	2,5 кН	1
	14 кН	2
	18,5 кН	3
	60,5 кН	4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
4. Определить угол между заданной силой и осью Ox, если известны величина силы и ее проекции на ось Ox: $F_x = -21$ кН, $F = 30$ кН. 	30°	1
	45°	2
	135°	3
	150°	4
5. Рассчитать сумму проекций системы сходящихся сил на ось Ox. $F_1 = 30$ кН, $F_2 = 10$ кН, $F_3 = 15$ кН, $F_4 = 24$ кН. 	−1 кН	1
	−16,3 кН	2
	34 кН	3
	79 кН	4

ЛЕКЦИЯ 4

Тема 1.3. Пара сил и момент силы относительно точки

Знать обозначение, модуль и определение моментов пары сил и силы относительно точки, условия равновесия системы пар сил.

Уметь определять моменты пар сил и момент силы относительно точки, определять момент результирующей пары сил.

Пара сил, момент пары сил

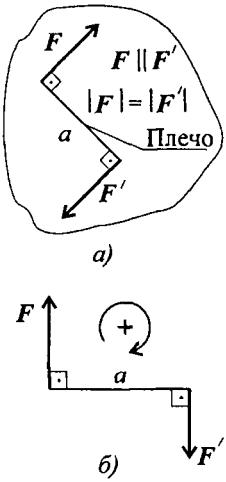


Рис. 4.1

Парой сил называется система двух сил, равных по модулю, параллельных и направленных в разные стороны.

Рассмотрим систему сил $(\boldsymbol{F}; \boldsymbol{F}')$, образующих пару.

Пара сил вызывает вращение тела и ее действие на тело оценивается моментом. Силы, входящие в пару, не уравновешиваются, т. к. они приложены к двум точкам (рис. 4.1). Их действие на тело не может быть заменено одной силой (равнодействующей).

Момент пары сил численно равен произведению модуля силы на расстояние между линиями действия сил (*плечо пары*).

Момент считают положительным, если пара вращает тело по часовой стрелке (рис. 4.1б): $M(\boldsymbol{F}; \boldsymbol{F}') = Fa; \qquad M > 0.$

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется *плоскостью действия пары.*

Свойства пар (без доказательств):

1. Пару сил можно перемещать в плоскости ее действия.

2. Эквивалентность пар. Две пары, моменты которых равны, (рис. 4.2) эквивалентны (действие их на тело аналогично).

3. Сложение пар сил. Систему пар сил можно заменить равнодействующей парой.

Момент равнодействующей пары равен алгебраической сумме моментов пар, составляющих систему (рис. 4.3):

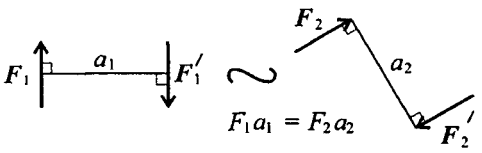


Рис. 4.2

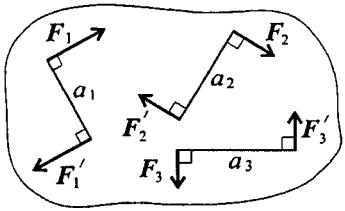


Рис. 4.3

$$M_\Sigma = F_1 a_1 + F_2 a_2 + F_3 a_3 + \cdots + F_n a_n; \quad M_\Sigma = \sum_0^n m_k.$$

4. Равновесие пар.

Для равновесия пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов пар системы равнялась нулю:

$$M_\Sigma = 0 \Longrightarrow \sum_0^n m_k = 0.$$

Момент силы относительно точки

Сила, не проходящая через точку крепления тела, вызывает вращение тела относительно точки, поэтому действие такой силы на тело оценивается моментом.

Момент силы относительно точки численно равен произведению модуля силы на расстояние от точки до линий действия силы. Перпендикуляр, опущенный из точки на линию действия силы (рис. 4.4), называется *плечом* силы.

Обозначение момента $M_O(\boldsymbol{F})$ или $m_O(\boldsymbol{F})$;

$$m_O(\boldsymbol{F}) = Fa.$$

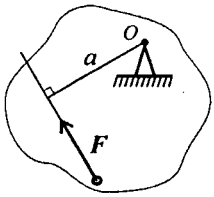


Рис. 4.4

Единица измерения $[m_O(\boldsymbol{F})] =$ Н·м.

Момент считается положительным, если сила разворачивает тело по часовой стрелке.

Примечание. В разных учебных пособиях знак момента назначается по-разному.

Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через точку, т. к. в этом случае расстояние от точки до силы равно нулю.

Примеры решения задач

Пример 1. Дана пара сил $|\boldsymbol{F}_1| = |\boldsymbol{F}_1'| = 42$ кН; плечо 2 м. Заменить заданную пару сил эквивалентной парой с плечом 0,7 м (рис. 4.5).

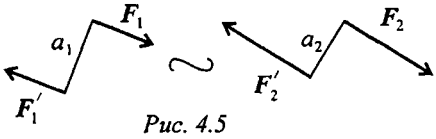


Рис. 4.5

Решение

Пары сил эквивалентны, если моменты этих пар численно равны:

$m_1 = F_1 a_1$; $m_1 = 42 \cdot 2 = 84$ кН·м; $m_2 = F_2 a_2$; $m_1 = m_2$.

Откуда $F_2 = \dfrac{84}{0{,}7} = 120$ кН.

Пример 2. Дана система пар сил (рис. 4.6). Определить момент результирующей пары.

Решение

Момент результирующей пары равен алгебраической сумме моментов пар системы:

$$M_\Sigma = \sum_0^n m_k.$$

Подставив численные значения, получим:

$m_1 = 10 \cdot 0{,}2 = 2$ кН·м;

$m_2 = -12 \cdot 0{,}3 = -3{,}6$ кН·м;

$m_3 = 6 \cdot 1{,}2 = 7{,}2$ кН·м;

$M_\Sigma = 2 + (-3{,}6) + 7{,}2 = 5{,}6$ кН·м.

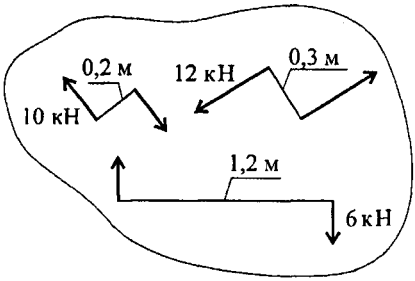


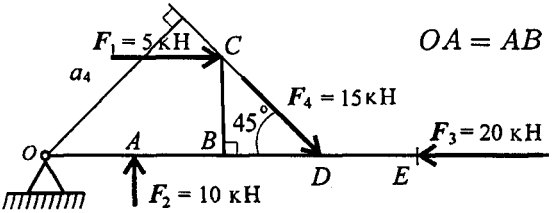
Рис. 4.6

Знак свидетельствует о том, что момент вызывает вращение по часовой стрелке. Величину силы и плеча определить не удается.

Примечание. Чтобы уравновесить данную систему пар, необходимо приложить пару сил, равную по модулю и направленную

в обратную сторону. Такую пару сил называют *уравновешивающей.*

Пример 3. Рассчитать сумму моментов сил относительно точки O (рис. 4.7).



$OA = AB = BD = DE = CB = 2$ м.

Рис. 4.7

Решение

1. Момент силы относительно точки численно равен произведению модуля силы на плечо силы.

2. Момент силы равен нулю, если линия действия силы проходит через точку.

$$m_{O1} = F_1 a_1; \qquad m_{O1} = 5 \cdot 2 = 10\,\text{кН·м};$$
$$m_{O2} = F_2 a_2; \qquad m_{O2} = -10 \cdot 2 = -20\,\text{кН·м};$$
$$m_{O3} = F_3 a_3; \qquad m_{O3} = 0;$$
$$m_{O4} = F_4 a_4; \qquad m_{O4} = 15 \cdot 6 \cdot 0{,}707 = 69{,}3\,\text{кН·м};$$
$$m_{O\Sigma} = 10 - 20 + 69{,}3 = 59{,}3\,\text{кН·м}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какие силы из системы сил (рис. 4.8) образуют пары? $F_1 = F_2 = F_4$; $F_3 = F_6$; $F_5 = 0{,}9F_6$.

2. Определите момент изображенной на рис. 4.9 пары сил. $|\boldsymbol{F}| = |\boldsymbol{F}'| = 5$ кН.

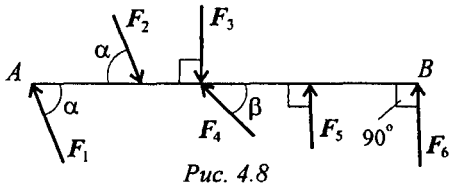


Рис. 4.8

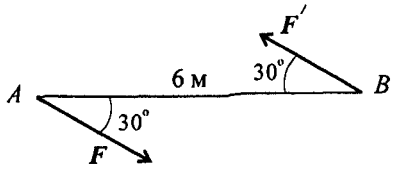


Рис. 4.9

3. Какие из изображенных пар (рис. 4.10) эквивалентны, если $F_1 = F_2 = 8$ кН; $F_3 = 6{,}4$ кН; $a_1 = 2$ м; $a_2 = 2{,}5$ м?

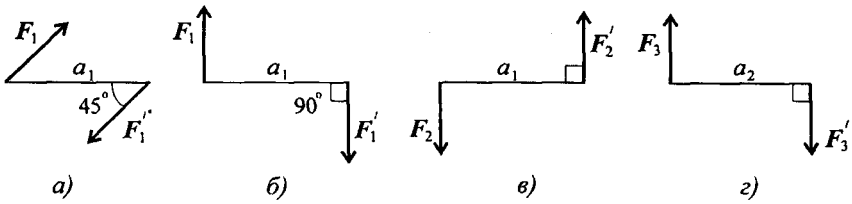


Рис. 4.10

4. Какую силу необходимо приложить в точке C (рис. 4.11), чтобы алгебраическая сумма моментов относительно точки O была равна нулю? $OA = AB = BC = 5$ м; $F_1 = 7{,}8$ кН; $F_2 = 3$ кН.

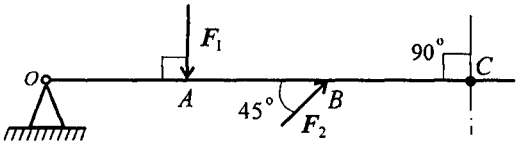
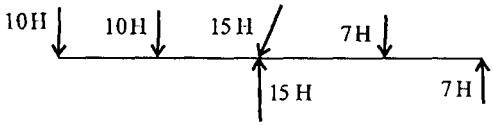
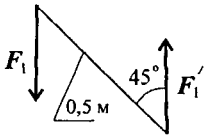


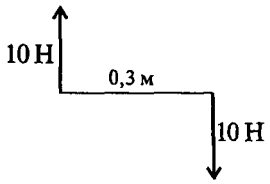
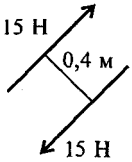
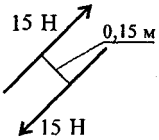
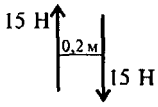
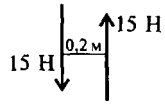
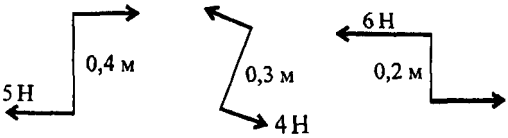
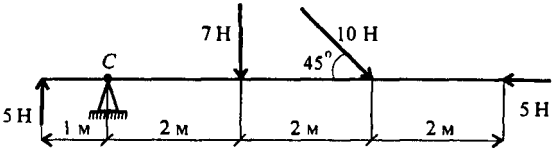
Рис. 4.11

5. Ответьте на вопросы тестового задания.

Тема 1.3. Статика

Вопросы	Ответы	Код
1. Какие силы из заданной системы сил, действующих на тело, образуют пару сил? 	7 Н; 7 Н	1
	7 Н; 10 Н	2
	10 Н; 10 Н	3
	15 Н; 15 Н	4
2. Определить момент заданной пары сил.  $F_1 = F_2 = 100$ Н	0,35 Н·м	1
	−35,35 Н·м	2
	50 Н·м	3
	−70,7 Н·м	4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
3. Укажите пару сил, эквивалентную заданной. 		1
		2
		3
		4
4. Найдите момент уравновешивающей пары сил. 	–0,4 Н·м	1
	0,4 Н·м	2
	–0,8 Н·м	3
	0,8 Н·м	4
5. Определить сумму моментов сил относительно точки C. 	7 Н·м	1
	47 Н·м	2
	19 Н·м	3
	77 Н·м	4

ЛЕКЦИЯ 5

Тема 1.4. Плоская система произвольно расположенных сил

Иметь представление о главном векторе, главном моменте равнодействующей плоской системы произвольно расположенных сил.

Знать теорему Пуансо о приведении силы к точке, приведение произвольной плоской системы сил к точке, три формы уравнений равновесия.

Уметь заменять произвольную плоскую систему сил одной силой и одной парой.

Теорема Пуансо о параллельном переносе сил

Силу можно перенести параллельно линии ее действия, при этом нужно *добавить пару сил с моментом*, равным произведению модуля силы на расстояние, на которое перенесена сила.

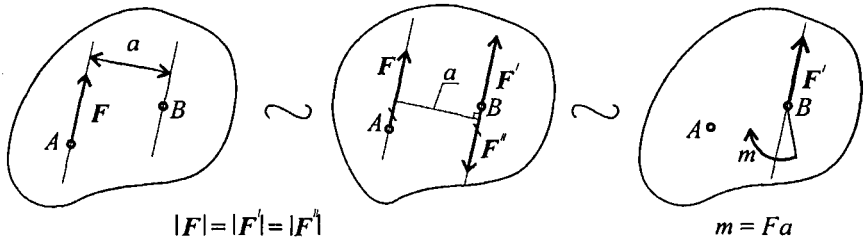


Рис. 5.1

Дано: сила в точке A (рис. 5.1).

Добавим в точке B уравновешенную систему сил ($\boldsymbol{F}'$; $\boldsymbol{F}''$). Образуется пара сил ($\boldsymbol{F}$; $\boldsymbol{F}''$). Получим силу в точке B и момент пары m

Приведение к точке плоской системы произвольно расположенных сил

Линии действия произвольной системы сил не пересекаются в одной точке, поэтому для оценки состояния тела такую систему сле-

дует упростить. Для этого все силы системы переносят в одну произвольно выбранную точку — точку приведения. Применяют теорему Пуансо. При любом переносе силы в точку, не лежащую на линии ее действия, добавляют пару сил.

Появившиеся при переносе пары называют *присоединенными* парами.

Дана плоская система произвольно расположенных сил (рис. 5.2).

Переносим все силы в точку O. Получим пучок сил в точке O, который можно заменить одной силой — *главным вектором системы.* Образующуюся систему пар сил можно заменить одной эквивалентной парой — *главным моментом системы.*

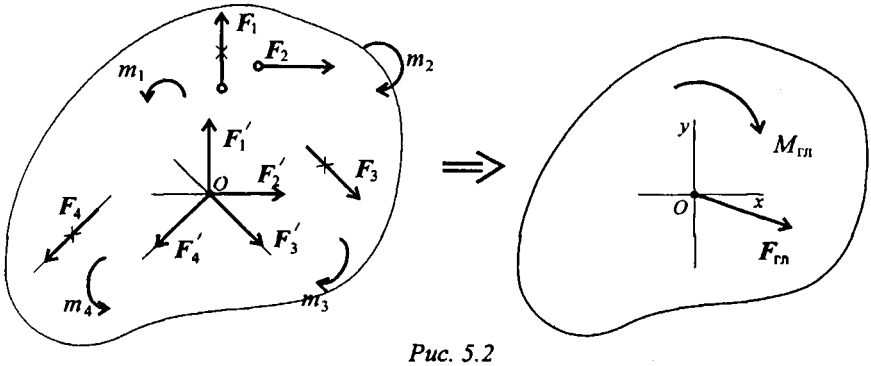


Рис. 5.2

$$F_{гл} = \sum_{0}^{n} F_k.$$

Главный вектор равен геометрической сумме векторов произвольной плоской системы сил. Проецируем все силы системы на оси координат и, сложив соответствующие проекции на оси, получим проекции главного вектора.

$$F_{гл_x} = \sum_{0}^{n} F_{kx}; \quad F_{гл_y} = \sum_{0}^{n} F_{ky}.$$

По величине проекций главного вектора на оси координат находим модуль главного вектора:

$$F_{гл} = \sqrt{F_{гл_x}^2 + F_{гл_y}^2}.$$

Главный момент системы сил равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно точки приведения.

$$M_{\text{гл}_O} = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n;$$
$$M_{\text{гл}_O} = \sum_0^n m_O(\boldsymbol{F}_k).$$

Таким образом, произвольная плоская система сил приводится к одной силе (главному вектору системы сил) и *одному моменту* (главному моменту системы сил).

Влияние точки приведения

Точка приведения выбрана произвольно. При изменении положения точки приведения величина главного вектора не изменится.

Величина главного момента при переносе точки приведения изменится, т. к. меняются расстояния от векторов-сил до новой точки приведения.

С помощью теоремы Вариньона о моменте равнодействующей можно определить точку на плоскости, относительно которой главный момент равен нулю. *Тогда произвольная плоская система сил может быть заменена одной силой.*

Эту силу называют *равнодействующей* системы сил.

Численно равнодействующая равна главному вектору системы сил, но приложена в другой точке, относительно которой главный момент равен нулю. Равнодействующую принято обозначать $\boldsymbol{F}_\Sigma$.

Численно ее значение определяется так же, как главный вектор системы сил:

$$F_\Sigma = F_{\text{гл}},$$
$$F_\Sigma = \sqrt{\left(\sum_0^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_0^n F_{ky}\right)^2}.$$

Точку приложения равнодействующей можно определить по формуле

$$d = \frac{M_{\text{гл}}}{F_{\text{гл}}},$$

где d — расстояние от выбранной точки приведения до точки приложения равнодействующей;

$M_{\text{гл}}$ — величина главного момента относительно выбранной точки приведения;

$F_{\text{гл}}$ — величина главного вектора системы сил.

Частные случаи приведения системы сил к точке

При приведении системы сил к точке возможны следующие варианты:

1. $F_{\text{гл}} = 0$, $M_{\text{гл}O} \neq 0$ $\Rightarrow$ тело вращается вокруг неподвижной оси.
2. $M_{\text{гл}O} = 0$, $F_{\text{гл}} \neq 0$; $F_{\text{гл}} = F_{\Sigma}$ $\Rightarrow$ тело движется прямолинейно ускоренно.
3. $M_{\text{гл}O} = 0$, $F_{\text{гл}} = 0$ $\Rightarrow$ тело находится в равновесии.

Условие равновесия произвольной плоской системы сил

1. При равновесии главный вектор системы равен нулю ($F_{\text{гл}} = 0$).

Аналитическое определение главного вектора приводит к выводу:

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F^2_{\text{гл}_x} + F^2_{\text{гл}_y}} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sum\limits_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum\limits_0^n F_{ky} = 0, \end{cases}$$

где F_{kx} и F_{ky} — проекции векторов на оси координат.

2. Поскольку точка приведения выбрана произвольно, ясно, что при равновесии сумма моментов сил системы относительно любой точки на плоскости должна равняться нулю:

$$M_{\text{гл}_O} = \sum_0^n m_O(\boldsymbol{F}_k) = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} \sum\limits_0^n m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0; \\ \sum\limits_0^n m_B(\boldsymbol{F}_k) = 0, \end{matrix}$$

где A и B — разные точки приведения.

Условие равновесия произвольной плоской системы сил может быть сформулировано следующим образом:

Для того чтобы твердое тело под действием произвольной плоской системы сил находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось равнялась нулю и алгебраическая сумма моментов всех сил системы относительно любой точки в плоскости действия сил равнялась нулю.

Получим основную форму уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum\limits_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum\limits_0^n F_{ky} = 0; \\ \left.\begin{array}{l} \sum\limits_0^n m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0; \\ \sum\limits_0^n m_B(\boldsymbol{F}_k) = 0; \\ \sum\limits_0^n m_C(\boldsymbol{F}_k) = 0 \end{array}\right\} \text{ уравнения моментов.} \end{cases}$$

Теоретически уравнений моментов можно записать бесконечное множество, но практически доказано, что на плоскости можно составить только три независимых уравнения моментов и при этом три точки (центры моментов) не должны лежать на одной линии.

Таким образом, имеем пять независимых уравнений равновесия.

Практически для решения задач на плоскости достаточно трех уравнений равновесия. В каждом конкретном случае используются уравнения с одним неизвестным.

Для разных случаев используются три группы уравнений равновесия.

Первая форма уравнений равновесия: $\begin{cases} \sum\limits_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum\limits_0^n F_{ky} = 0; \\ \sum\limits_0^n m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0. \end{cases}$

Вторая форма уравнений равновесия: $\begin{cases} \sum\limits_0^n F_{ky} = 0; \\ \sum\limits_0^n m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0; \\ \sum\limits_0^n m_B(\boldsymbol{F}_k) = 0. \end{cases}$

Третья форма уравнений равновесия: $\begin{cases} \sum\limits_0^n m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0; \\ \sum\limits_0^n m_B(\boldsymbol{F}_k) = 0; \\ \sum\limits_0^n m_C(\boldsymbol{F}_k) = 0. \end{cases}$

Для частного случая, если уравновешена система параллельных сил, можно составить только два уравнения равновесия:

$$\sum_0^n F_{kx} = 0; \quad \sum_0^n m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0.$$

Ось Ox системы координат параллельна линии действия сил.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти момент присоединенной пары при переносе силы $\boldsymbol{F}_3$ в точку B (рис. 5.3). $F_1 = 10$ кН; $F_2 = 15$ кН; $F_3 = 18$ кН; $a = 0{,}2$ м.

Решение

Используем теорему Пуансо.

$M_B(\boldsymbol{F}_3) = 18 \cdot 0{,}2 = 3{,}6$ кН·м.

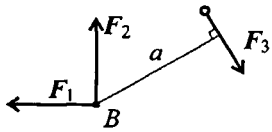


Рис. 5.3

Пример 2. Найти главный вектор системы (рис. 5.4). $F_1 = 10$ кН; $F_2 = 16$ кН; $F_3 = 12$ кН; $m = 60$ кН·м.

Решение

Главный вектор равен геометрической сумме сил:

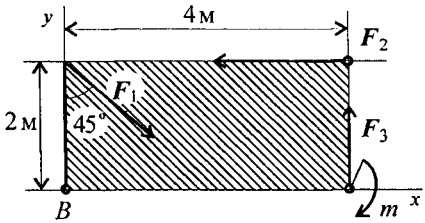


Рис. 5.4

$$\boldsymbol{F}_{\text{гл}_x} = \sum_0^n \boldsymbol{F}_{kx};$$
$$F_{\text{гл}_x} = F_1 \cos 45° - F_2 = -9\,\text{кН}$$
$$\boldsymbol{F}_{\text{гл}_y} = \sum_0^n \boldsymbol{F}_{ky};$$
$$F_{\text{гл}_y} = -F_1 \cos 45° + F_3 = 5\,\text{кН}$$
$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F_{\text{гл}_x}^2 + F_{\text{гл}_y}^2};$$
$$F_{\text{гл}} = \sqrt{(-9)^2 + 5^2} \approx 10\,\text{кН}.$$

Пример 3. Найти главный момент системы относительно точки B (использовать данные примера 2).

Решение

Главный момент равен алгебраической сумме моментов сил относительно точки приведения:

$$M_{\text{гл}} = \sum_0^n m_B(\boldsymbol{F}_k);$$
$$\sum m_B = F_1 \cdot 2 \cdot \sin 45° - F_2 \cdot 2 - F_3 \cdot 4 + m;$$
$$M_{\text{гл}} = 10 \cdot 2 \cdot 0{,}7 - 16 \cdot 2 - 12 \cdot 4 + 60 = -6\,\text{кН·м}.$$

Пример 4. К телу приложена уравновешенная система сил (рис. 5.5). Две из них неизвестны. Определить неизвестные силы.

$F_1 = 10\,\text{кН}$; $F_2 = 16\,\text{кН}$.

Наносим оси координат и используем уравнения равновесия:

$\sum F_x = 0$; $F_2 - F_4 \cos 30° = 0$;
$F_4 = F_2 / \cos 30° \cong 18{,}5\,\text{кН}$;
$\sum F_y = 0$; $-F_1 + F_3 + F_4 \cos 60° = 0$;
$F_3 = F_1 - F_4 \cos 60°$;
$F_3 = 10 - 18{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}75\,\text{кН}$.

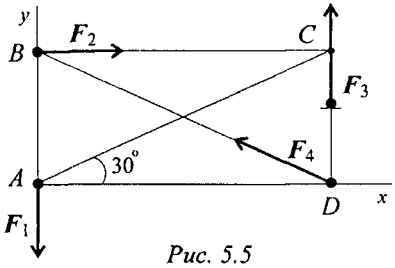


Рис. 5.5

Контрольные вопросы и задания

1. Чему равен главный вектор системы сил?

2. Чему равен главный момент системы сил при приведении ее к точке?

3. Чем отличается главный вектор от равнодействующей плоской системы произвольно расположенных сил?

Выбрать из предложенных ответов:

— величиной;

— направлением;

— величиной и направлением;

— точкой приложения;

— ничем.

4. Тело движется равномерно и прямолинейно (равновесие).

Чему равны главный вектор и главный момент системы?

5. Тело вращается вокруг неподвижной оси.

Чему равны главный вектор и главный момент действующей на него системы сил?

6. Найдите главный вектор и главный момент системы сил, если центр приведения находится в точке A (рис. 5.6).

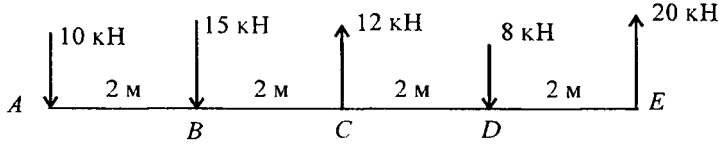


Рис. 5.6

7. Какое еще уравнение равновесия нужно составить, чтобы убедиться в том, что система сил (рис. 5.7) находится в равновесии? $\sum_0^n F_{kx} = 0$; $\sum_0^n F_{ky} = 0$.

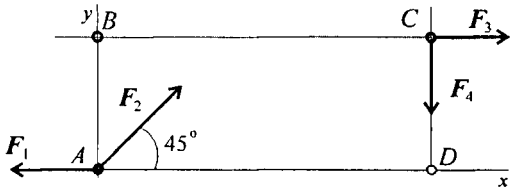


Рис. 5.7

ЛЕКЦИЯ 6

Тема 1.4. Балочные системы. Определение реакций опор и моментов защемления

Иметь представление о видах опор и возникающих реакциях в опорах.

Знать три формы уравнений равновесия и уметь их использовать для определения реакций в опорах балочных систем.

Уметь выполнять проверку правильности решения.

Виды нагрузок и разновидности опор

Виды нагрузок

По способу приложения нагрузки делятся на сосредоточенные и распределенные. Если реально передача нагрузки происходит на пренебрежимо малой площадке (в точке), нагрузку называют *сосредоточенной.*

Часто нагрузка распределена по значительной площадке или линии (давление воды на плотину, давление снега на крышу и т. п.), тогда нагрузку считают *распределенной.*

В задачах статики для абсолютно твердых тел распределенную нагрузку можно заменить равнодействующей сосредоточенной силой (рис. 6.1).

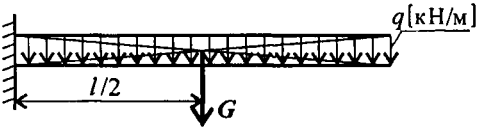


Рис. 6.1

q — интенсивность нагрузки; l — длина стержня;

$G = ql$ — равнодействующая распределенной нагрузки.

Разновидности опор балочных систем (см. лекцию 1)

Балка — конструктивная деталь в виде прямого бруса, закрепленная на опорах и изгибаемая приложенными к ней силами.

Высота сечения балки незначительна по сравнению с длиной.

Жесткая заделка (*защемление*) (рис. 6.2)

Опора не допускает перемещений и поворотов. Заделку заменяют двумя составляющими силы $\boldsymbol{R}_{Ax}$ и $\boldsymbol{R}_{Ay}$ и парой с моментом M_R.

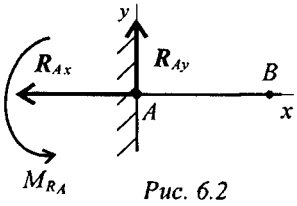


Рис. 6.2

Для определения этих неизвестных удобно использовать систему уравнений в виде

$$\sum_0^n F_{kx} = 0; \quad \sum_0^n F_{ky} = 0; \quad \sum_0^n m_{kA} = 0$$

Каждое уравнение имеет одну неизвестную величину и решается без подстановок.

Для контроля правильности решений используют дополнительное уравнение моментов относительно любой точки на балке, например B:

$$\sum_0^n m_{kB} = 0.$$

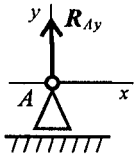


Рис. 6.3

Шарнирно-подвижная опора (рис. 6.3)

Опора допускает поворот вокруг шарнира и перемещение вдоль опорной поверхности. Реакция направлена перпендикулярно опорной поверхности.

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 6.4)

Опора допускает поворот вокруг шарнира и может быть заменена двумя составляющими силы вдоль осей координат.

Балка на двух шарнирных опорах (рис. 6.5)

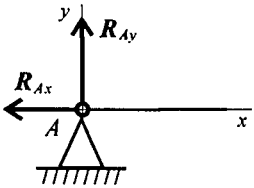


Рис. 6.4

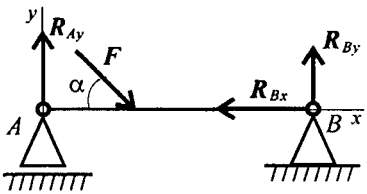


Рис. 6.5

Не известны три силы, две из них — вертикальные, следовательно, удобнее для определения неизвестных использовать систему

уравнений во второй форме

$$\sum_0^n m_{kA} = 0; \quad \sum_0^n m_{kB} = 0; \quad \sum_0^n F_{kx} = 0.$$

Составляются уравнения моментов относительно точек крепления балки. Поскольку момент силы, проходящей через точку крепления, равен 0, в уравнении останется одна неизвестная сила.

Из уравнения $\sum_0^n F_{kx} = 0$ определяется реакция R_{Bx}.

Из уравнения $\sum_0^n m_{kA} = 0$ определяется реакция R_{By}.

Из уравнения $\sum_0^n m_{kB} = 0$ определяется реакция R_{Ay}.

Для контроля правильности решения используется дополнительное уравнение

$$\sum_0^n F_{ky} = 0.$$

При равновесии твердого тела, где можно выбрать три точки, не лежащие на одной прямой, удобно использовать систему уравнений в третьей форме (рис. 6.6):

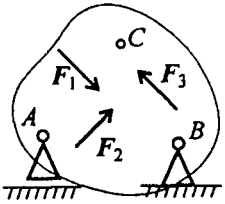


Рис. 6.6

$$\begin{cases} \sum_0^n m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0; \\ \sum_0^n m_B(\boldsymbol{F}_k) = 0; \\ \sum_0^n m_C(\boldsymbol{F}_k) = 0. \end{cases}$$

Примеры решения задач

Пример 1. Одноопорная (защемленная) балка нагружена сосредоточенными силами и парой сил (рис. 6.7). Определить реакции заделки.

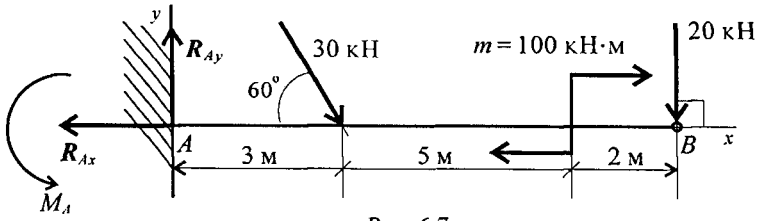


Рис. 6.7

Решение

1. В заделке может возникнуть реакция, представляемая двумя составляющими ($\boldsymbol{R}_{Ay}$; $\boldsymbol{R}_{Ax}$), и реактивный момент M_A. Наносим на схему балки возможные направления реакций.

З а м е ч а н и е. Если направления выбраны неверно, при расчетах получим отрицательные значения реакций. В этом случае реакции на схеме следует направить в противоположную сторону, не повторяя расчета.

В силу малой высоты считают, что все точки балки находятся на одной прямой; все три неизвестные реакции приложены в одной точке. Для решения удобно использовать систему уравнений равновесия в первой форме. Каждое уравнение будет содержать одну неизвестную.

2. Используем систему уравнений:

$$\sum_0^n F_{kx} = 0; \quad \sum_0^n F_{ky} = 0; \quad \sum_0^n m_{k_A} = 0.$$

$$\sum_0^n F_{kx} = -R_{Ax} + 30 \cdot \cos 60^\circ + 20 \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

$$R_{Ax} = 30 \cdot \cos 60^\circ + 20 \cdot \cos 90^\circ = 15\,\text{кН}.$$

$$\sum_0^n F_{ky} = R_{Ay} - 30 \cdot \cos 30^\circ - 20 \cdot \cos 0^\circ = 0.$$

$$R_{Ay} = 30 \cdot 0{,}866 + 20 \cdot 1 = 45{,}98\,\text{кН}.$$

$$\sum_0^n m_{kA} = -M_A + 30 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ + 100 + 20 \cdot 10 = 0.$$

$$M_A = 377{,}94\,\text{кН·м}.$$

Знаки полученных реакций (+), следовательно, направления реакций выбраны верно.

3. Для проверки правильности решения составляем уравнение моментов относительно точки B.

$$\sum m_{kB} = -M_A + R_{Ay} \cdot 10 - 30 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ + 100 = 0.$$

Подставляем значения полученных реакций:

$$-377{,}94 + 45{,}98 \cdot 10 - 210 \cdot 0{,}866 + 100 = 0;$$

$$-559{,}8 + 559{,}8 = 0.$$

Решение выполнено верно.

Пример 2. Двухопорная балка с шарнирными опорами A и B нагружена сосредоточенной силой F, распределенной нагрузкой с интенсивностью q и парой сил с моментом m (рис. 6.8а). Определить реакции опор.

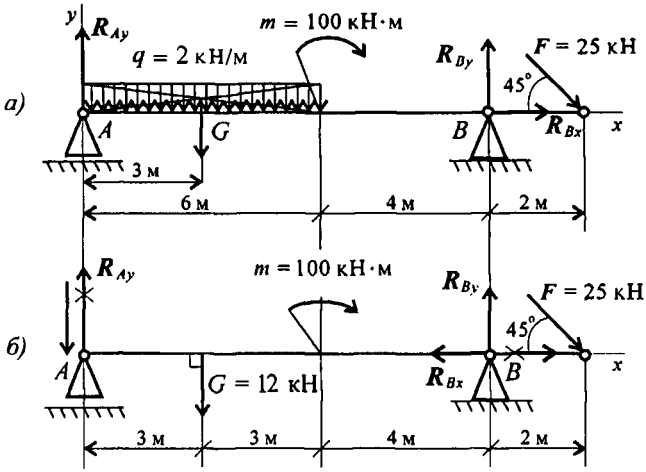


Рис. 6.8

Решение

1. Левая опора (точка A) — подвижный шарнир, здесь реакция направлена перпендикулярно опорной поверхности.

Правая опора (точка B) — неподвижный шарнир, здесь наносим две составляющие реакции вдоль осей координат. Ось Ox совмещаем с продольной осью балки.

2. Поскольку на схеме возникнут две неизвестные вертикальные реакции, использовать первую форму уравнений равновесия нецелесообразно.

3. Заменяем распределенную нагрузку сосредоточенной:

$$G = ql; \quad G = 2 \cdot 6 = 12\,\text{кН}.$$

Сосредоточенную силу помещаем в середине пролета, далее задача решается с сосредоточенными силами (рис. 6.8б).

4. Наносим возможные реакции в опорах (направление произвольное).

5. Для решения выбираем уравнение равновесия в виде

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_0^n m_{kA} = 0; \\ \sum\limits_0^n m_{kB} = 0; \\ \sum\limits_0^n F_{kx} = 0. \end{array}\right| \qquad \begin{array}{l} \text{Проверка:} \\ \sum\limits_0^n F_{ky} = 0. \end{array}$$

6. Составляем уравнения моментов относительно точек крепления:

$$\sum_0^n m_{kA} = G \cdot 3 + m - R_{By} \cdot 10 + F \cdot 12 \cdot \sin 45^\circ = 0.$$

$$R_{By} \cdot 10 = G \cdot 3 + m + F \cdot 12 \cdot \sin 45^\circ;$$

$$R_{By} \cdot 10 = 12 \cdot 3 + 100 + 25 \cdot 12 \cdot 0{,}7; \quad R_{By} = \frac{346}{10} = 34{,}6\,\text{кН}.$$

Реакция направлена верно.

$$\sum_0^n m_{kB} = R_{Ay} \cdot 10 - G \cdot 7 + m + F \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ = 0.$$

$$R_{Ay} \cdot 10 = G \cdot 7 - m - F \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ;$$

$$R_{Ay} \cdot 10 = 12 \cdot 7 - 100 - 50 \cdot 0{,}7; \quad R_{Ay} = -\frac{51}{10} = -5{,}1\,\text{кН}.$$

Реакция отрицательная, следовательно, $\boldsymbol{R}_{Ay}$ нужно направить в противоположную сторону.

7. Используя уравнение проекций, получим:

$$\sum_{0}^{n} F_{kx} = R_{Bx} + F\cos 45° = 0; \quad \boldsymbol{R}_{Bx} = -F\cos 45°; \quad \boldsymbol{R}_{Bx} = -17{,}5\,\text{кН}$$

$\boldsymbol{R}_{Bx}$ — горизонтальная реакция в опоре B.

Реакция отрицательна, следовательно, на схеме ее направление будет противоположно выбранному.

8. *Проверка правильности решения.* Для этого используем четвертое уравнение равновесия $\sum_{0}^{n} F_{ky} = 0$:

$-R_{Ay} - G + R_{By} - F\cos 45° = 0.$

Подставим полученные значения реакций.

Если условие выполнено, решение верно:

$-5{,}1 - 12 + 34{,}6 - 25 \cdot 0{,}7 = 0.$

Контрольные вопросы и задания

1. Замените распределенную нагрузку сосредоточенной и определите расстояние от точки приложения равнодействующей до опоры A (рис. 6.9).

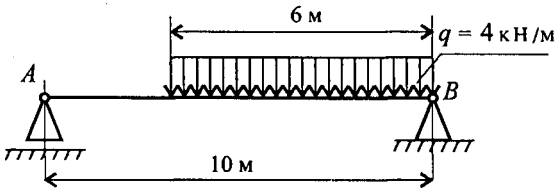


Рис. 6.9

2. Рассчитайте величину суммарного момента сил системы относительно точки A (рис. 6.10).

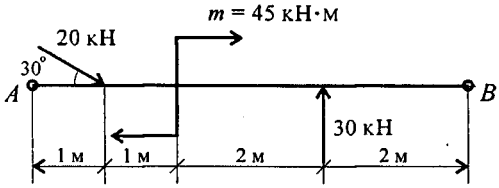


Рис. 6.10

3. Какую из форм уравнений равновесия целесообразно использовать при определении реакций в заделке?

4. Какую форму системы уравнений равновесия целесообразно использовать при определении реакций в опорах двухопорной балки и почему?

5. Определите реактивный момент в заделке одноопорной балки, изображенной на схеме (рис. 6.11).

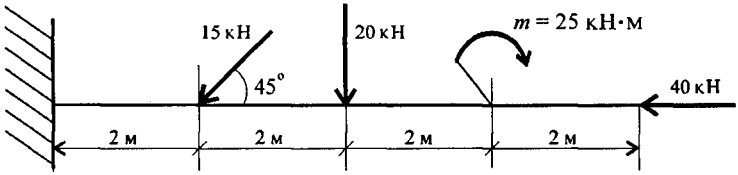


Рис. 6.11

6. Определите вертикальную реакцию в заделке для балки, представленной на рис. 6.11.

ЛЕКЦИЯ 7

Тема 1.5. Пространственная система сил

Знать момент силы относительно оси, свойства момента, аналитический способ определения равнодействующей, условия равновесия пространственной системы сил.

Уметь выполнять разложение силы на три взаимно перпендикулярные оси, определять момент силы относительно оси.

Пространственная система сил — система сил, линии действия которых не лежат в одной плоскости.

Момент силы относительно оси

Момент силы относительно оси равен моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью (рис. 7.1а).

$$M_{OO}(\boldsymbol{F}) = \text{пр}\,\boldsymbol{F}a,$$

a — расстояние от оси до проекции $\boldsymbol{F}$;
$\text{пр}\,\boldsymbol{F}$ — проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси OO.
$\text{пр}\,\boldsymbol{F} = F\cos\alpha$; $\quad M_{OO}(\boldsymbol{F}) = F\cos\alpha \cdot a$.

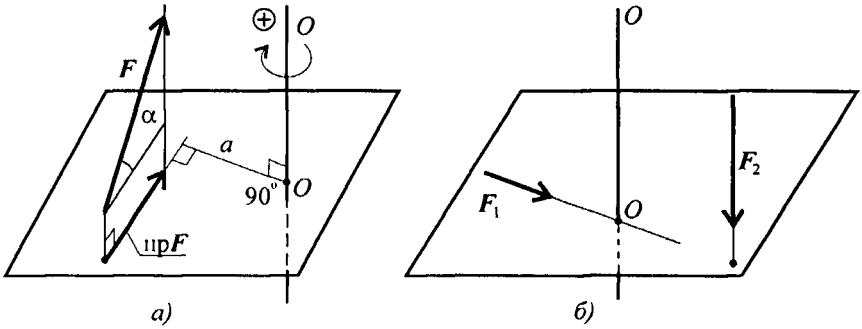


Рис. 7.1

Момент считаем положительным, если сила разворачивает тело по часовой стрелке. Смотреть со стороны положительного направления оси.

Если линия действия силы пересекает ось или линия действия силы параллельна оси, моменты силы относительно этой оси равны нулю (рис. 7.1б).

Силы и ось лежат в одной плоскости, они не смогут повернуть тело вокруг этой оси.

$\boldsymbol{F}_1$ пересекает ось; $M_{OO}(\boldsymbol{F}_1) = 0$;

$\boldsymbol{F}_2 \| OO$; пр $\boldsymbol{F}_2 = 0$; $M_{OO}(\boldsymbol{F}_2) = 0$.

Пространственная сходящаяся система сил

Вектор в пространстве

В пространстве вектор силы проецируется на три взаимно перпендикулярные оси координат. Проекции вектора образуют ребра прямоугольного параллелепипеда, вектор силы совпадает с диагональю (рис. 7.2).

Модуль вектора может быть получен из зависимости

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

где

$$F_x = F\cos\alpha_x;$$
$$F_y = F\cos\alpha_y;$$
$$F_z = F\cos\alpha_z,$$

α_x, α_y, α_z — углы между вектором $\boldsymbol{F}$ и осями координат.

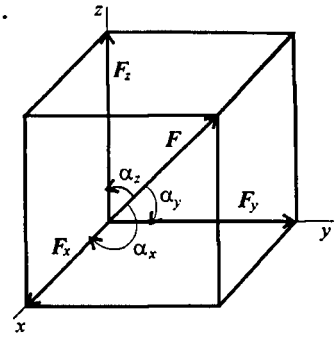


Рис. 7.2

Пространственная сходящаяся система сил

Пространственная сходящаяся система сил — система сил, не лежащих в одной плоскости, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Равнодействующую пространственной системы сил можно определить, построив пространственный многоугольник (рис. 7.3),

$$\boldsymbol{F}_\Sigma = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \cdots + \boldsymbol{F}_n.$$

Доказано, что равнодействующая системы сходящихся сил приложена в точке пересечения линий действия сил системы.

Модуль равнодействующей пространственной системы сходящихся сил можно определить аналитически, использовав метод проекций.

Совмещаем начало координат с точкой пересечения линий действия сил системы. Проецируем все силы на оси координат и суммируем соответствующие проекции (рис. 7.4). Получим проекции равнодействующей на оси координат: $F_{\Sigma x} = \sum_0^n F_{kx}$; $F_{\Sigma y} = \sum_0^n F_{ky}$; $F_{\Sigma z} = \sum_0^n F_{kz}$.

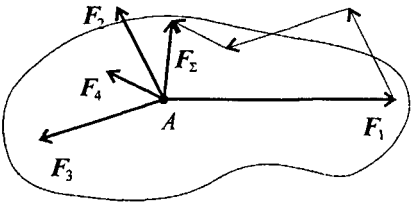


Рис. 7.3

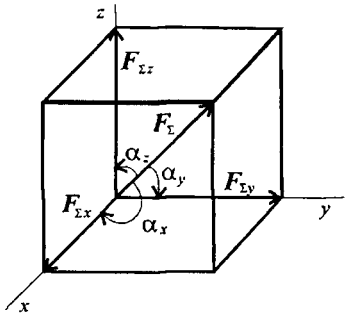


Рис. 7.4

Модуль равнодействующей системы сходящихся сил определим по формуле

$$F_\Sigma = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2 + F_{\Sigma z}^2}.$$

Направление вектора равнодействующей определяется углами

$$\alpha_x = (\boldsymbol{F}_\Sigma \,\hat{}\, \boldsymbol{F}_{\Sigma x}); \quad \alpha_y = (\boldsymbol{F}_\Sigma \,\hat{}\, \boldsymbol{F}_{\Sigma y}); \quad \alpha_z = (\boldsymbol{F}_\Sigma \,\hat{}\, \boldsymbol{F}_{\Sigma z}),$$

где $$\cos\alpha_x = \frac{F_{\Sigma x}}{F_\Sigma}; \quad \cos\alpha_y = \frac{F_{\Sigma y}}{F_\Sigma}; \quad \cos\alpha_z = \frac{F_{\Sigma z}}{F_\Sigma}.$$

Произвольная пространственная система сил

Приведение произвольной пространственной системы сил к центру O

Дана пространственная система сил (рис. 7.5а). Приведем ее к центру O.

Силы необходимо параллельно перемещать, при этом образуется система пар сил. Момент каждой из этих пар равен произведению модуля силы на расстояние до центра приведения.

В центре приведения возникает пучок сил, который может быть заменен суммарной силой (главный вектор) $\boldsymbol{F}_{\text{гл}}$ (рис. 7.5б).

Моменты пар сил можно сложить, получив суммарный момент системы $M_{\text{гл}}$ (главный момент).

Таким образом, произвольная пространственная система сил приводится к главному вектору и главному моменту.

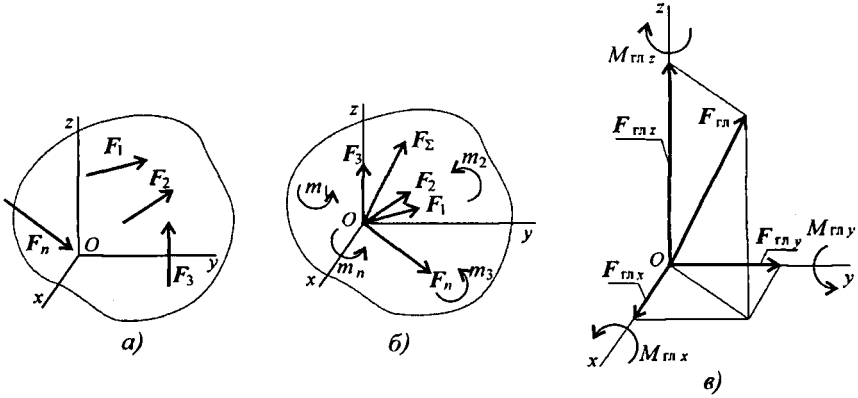


Рис. 7.5

Главный вектор принято раскладывать на три составляющие, направленные вдоль осей координат (рис. 7.5в).

Обычно суммарный момент раскладывают на составляющие: три момента относительно осей координат.

Абсолютное значение главного вектора (рис. 7.5б) равно

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F_{\text{гл}\,x}^2 + F_{\text{гл}\,y}^2 + F_{\text{гл}\,z}^2},$$

где $F_{\text{гл}\,x} = \sum\limits_0^n F_{kx}$; $F_{\text{гл}\,y} = \sum\limits_0^n F_{ky}$; $F_{\text{гл}\,z} = \sum\limits_0^n F_{kz}$.

Абсолютное значение главного момента определяется по формуле $M_{\text{гл}} = \sum\limits_0^n m_k$;

$$M_{\text{гл}} = \sqrt{M_{\text{гл}\,x}^2 + M_{\text{гл}\,y}^2 + M_{\text{гл}\,z}^2},$$

где $M_{\text{гл}\,x} = \sum\limits_0^n m_{kx}$; $\quad M_{\text{гл}\,y} = \sum\limits_0^n m_{ky}$; $\quad M_{\text{гл}\,z} = \sum\limits_0^n m_{kz}$.

Уравнения равновесия пространственной системы сил

При равновесии $F_{\text{гл}} = 0$; $M_{\text{гл}} = 0$.

Получаем шесть уравнений равновесия:

$$\sum_0^n F_{kx} = 0; \quad \sum_0^n F_{ky} = 0; \quad \sum_0^n F_{kz} = 0;$$

$$\sum_0^n m_{kx}(\boldsymbol{F}_k) = 0; \quad \sum_0^n m_{ky}(\boldsymbol{F}_k) = 0; \quad \sum_0^n m_{kz}(\boldsymbol{F}_k) = 0.$$

Шесть уравнений равновесия пространственной системы сил соответствуют шести независимым возможным перемещениям тела в пространстве: трем перемещениям вдоль координатных осей и трем вращениям вокруг этих осей.

Примеры решения задач

Пример 1. На тело в форме куба с ребром $a = 10$ см действуют три силы (рис. 7.6). Определить моменты сил относительно осей координат, совпадающих с ребрами куба.

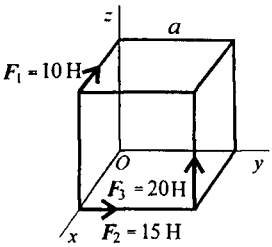


Рис. 7.6

Решение

1. Моменты сил относительно оси Ox:
$m_{Ox}(\boldsymbol{F}_1) = 0$ (сила $\boldsymbol{F}_1 \parallel$ оси Ox);
$m_{Ox}(\boldsymbol{F}_2) = 0$ (сила $\boldsymbol{F}_2$ пересекает ось Ox);
$m_{Ox}(\boldsymbol{F}_3) = F_3 a$; $m_{Ox} = -20 \cdot 0{,}1 = -2$ Н·м.

2. Моменты сил относительно оси Oy:
$m_{Oy}(\boldsymbol{F}_1) = F_1 a$; $m_{Oy} = 10 \cdot 0{,}1 = 1$ Н·м;
$m_{Oy}(\boldsymbol{F}_2) = 0$ (сила $\boldsymbol{F}_2 \parallel$ оси Oy);
$m_{Oy}(\boldsymbol{F}_3) = F_3 a$; $m_{Oy} = 20 \cdot 0{,}1 = 2$ Н·м.

3. Моменты сил относительно оси Oz:
$m_{Oz}(\boldsymbol{F}_1) = 0$ (сила пересекает ось Oz);
$m_{Oz}(\boldsymbol{F}_2) = -F_2 a$; $m_{Oz}(\boldsymbol{F}_2) = -15 \cdot 0{,}1 = -1{,}5$ Н·м;
$m_{Oz}(\boldsymbol{F}_3) = 0$ (сила $\boldsymbol{F}_3 \parallel$ оси Oz);

Пример 2. На горизонтальном валу закреплены два колеса, $r_1 = 0{,}4$ м; $r_2 = 0{,}8$ м. Остальные размеры — на рис. 7.7. К колесу 1 приложена сила F_1, к колесу 2 — силы $F_2 = 12$ кН, $F_3 = 4$ кН.

Определить силу F_1 и реакции в шарнирах A и B в состоянии равновесия.

Напомним:

1. При равновесии выполняются шесть уравнений равновесия.

Уравнения моментов следует составлять относительно опор A и B.

2. Силы $\boldsymbol{F}_2 \| Ox$; $\boldsymbol{F}_1 \| Oy$; $\boldsymbol{F}_3 \| Oy$.

Моменты этих сил относительно соответствующих осей равны нулю.

3. Расчет следует завершить проверкой, использовав дополнительные уравнения равновесия.

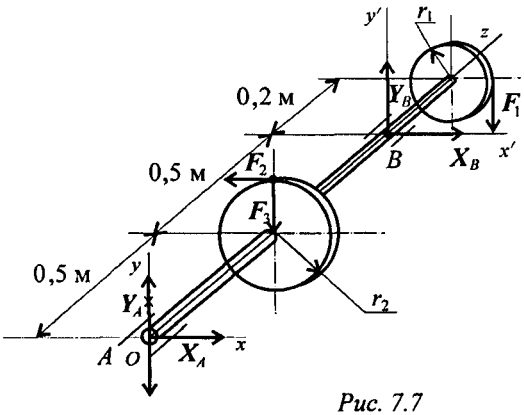


Рис. 7.7

Решение

1. Определяем силу F_1, составив уравнение моментов сил относительно оси Oz:

$$\sum m_{Oz} = 0; \quad -F_2 r_2 + F_1 r_1 = 0; \quad F_1 = \frac{F_2 r_2}{r_1}; \quad F_1 = \frac{12 \cdot 0{,}8}{0{,}4} = 24\,\text{кН}.$$

2. Определяем реакции в опоре A. На опоре действуют две составляющие реакции ($\boldsymbol{Y}_A; \boldsymbol{X}_A$).

Составляем уравнение моментов сил относительно оси Ox' (в опоре B).

Поворот вокруг оси Ox' не происходит:

$$\sum m_{Ox'} = 0; \quad F_1 \cdot 0{,}2 - F_3 \cdot 0{,}5 + Y_A \cdot 1 = 0;$$

$$Y_A = \frac{F_3 \cdot 0{,}5 - F_1 \cdot 0{,}2}{1}; \quad Y_A = \frac{4 \cdot 0{,}5 - 24 \cdot 0{,}2}{1} = -2{,}8\,\text{кН}.$$

Знак «минус» означает, что реакция направлена в противоположную сторону.

Поворот вокруг оси Oy' не происходит, составляем уравнение моментов сил относительно оси Oy' (в опоре B):

$$\sum m_{Oy'} = 0; \quad -X_A \cdot 1 + F_2 \cdot 0{,}5 = 0;$$

$$X_A = \frac{F_2 \cdot 0{,}5}{1}; \quad X_A = \frac{12 \cdot 0{,}5}{1} = 6\,\text{кН}.$$

3. Определяем реакции в опоре B. На опоре действуют две составляющие реакции $(\boldsymbol{X}_B; \boldsymbol{Y}_B)$. Составляем уравнение моментов сил относительно оси Ox (опора A):

$$\sum m_{Ox} = 0; \quad F_3 \cdot 0{,}5 - Y_B \cdot 1 + F_1 \cdot 1{,}2 = 0; \quad Y_B = \frac{F_3 \cdot 0{,}5 + F_1 \cdot 1{,}2}{1};$$

$$Y_B = \frac{4 \cdot 0{,}5 + 24 \cdot 1{,}2}{1} = 30{,}8\,\text{кН}.$$

Составляем уравнение моментов относительно оси Oy (опора A):

$$\sum m_{Oy} = 0; \quad -F_2 \cdot 0{,}5 + X_B \cdot 1 = 0;$$

$$X_B = \frac{F_2 \cdot 0{,}5}{1}; \quad X_B = \frac{12 \cdot 0{,}5}{1} = 6\,\text{кН}.$$

4. Проверка. Используем уравнения проекций:

$$\sum_0^n F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B - F_2 = 0; \quad 6 + 6 - 12 = 0; \quad 0 = 0.$$

$$\sum_0^n F_{ky} = 0; \quad -Y_A - F_3 + Y_B - F_1 = 0; \quad -2{,}8 - 4 + 30{,}8 - 24 = 0; \quad 0 = 0.$$

Расчет выполнен верно.

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите формулы для расчета главного вектора пространственной системы сходящихся сил.

2. Запишите формулу для расчета главного вектора пространственной системы произвольно расположенных сил.

3. Запишите формулу для расчета главного момента пространственной системы сил.

4. Запишите систему уравнений равновесия пространственной системы сил.

5. Какое из уравнений равновесия нужно использовать для определения реакции стержня R_1 (рис. 7.8)?

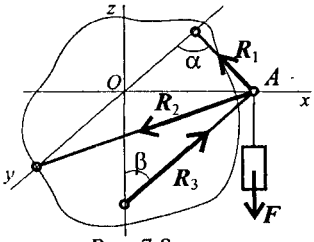


Рис. 7.8

1. $\sum\limits_{0}^{n} F_{kx} = 0.$ 2. $\sum\limits_{0}^{n} F_{ky} = 0.$

3. $\sum\limits_{0}^{n} F_{kz} = 0.$ 4. $\sum\limits_{0}^{n} m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0.$

6. Определите главный момент системы сил (рис. 7.9). Точка приведения — начало координат. Координатные оси совпадают с ребрами куба, ребро куба равно 20 см; $F_1 = 20$ кН; $F_2 = 30$ кН.

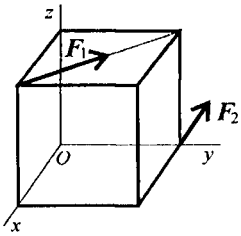


Рис. 7.9

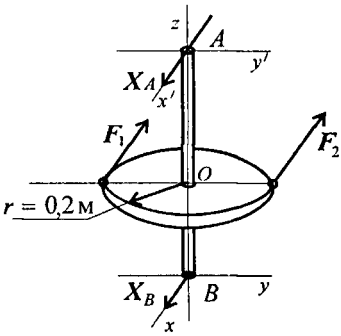


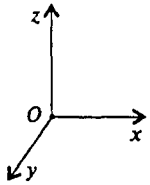
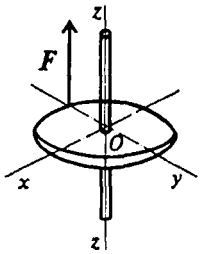
Рис. 7.10

7. Определите реакцию X_B (рис. 7.10). Вертикальная ось со шкивом нагружена двумя горизонтальными силами. Силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ параллельны оси Ox. $AO = 0{,}3$ м; $OB = 0{,}5$ м; $F_1 = 2$ кН; $F_2 = 3{,}5$ кН.

Р е к о м е н д а ц и я. Составить уравнение моментов относительно оси Oy' в точке A.

8. Ответьте на вопросы тестового задания.

Тема 1.5. Статика. Пространственная система сил

Вопросы	Ответы	Код
1. Что можно сказать о равнодействующей пространственной системы сил, если: 1) $F_{\Sigma x} = 0$; 2) $F_{\Sigma y} \neq 0$; 3) $F_{\Sigma z} = 0$. 	$F_\Sigma \parallel Ox$	1
	$F_\Sigma \parallel Oy$	2
	$F_\Sigma \parallel$ пл xOy	3
	$F_\Sigma \parallel$ пл zOy	4
2. Сколько независимых уравнений равновесия можно записать для пространственной системы сил?	3	1
	6	2
	4	3
	2	4
3. Найдите момент силы относительно оси Oy. Диаметр колеса равен 0,4 м; $F = 5$ кН. 	0	1
	5 кН·м	2
	2 кН·м	3
	1 кН·м	4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
4. Определить сумму моментов относительно начала координат. $F_1 = 12$ Н, $F_2 = 5$ Н, $F_3 = 3$ Н; сторона куба равна 0,5 м.	12 кН·м	1
	2,5 кН·м	2
	3,5 кН·м	3
	7,4 кН·м	4
5. Найти X_B, если $F_1 = 48$ кН; $F_2 = 96$ кН; $F_3 = 15$ кН.	10,7 кН	1
	4,3 кН	2
	12,1 кН	3
	15,2 кН	4

ЛЕКЦИЯ 8

Тема 1.6. Центр тяжести

Иметь представление о системе параллельных сил и центре системы параллельных сил, о силе тяжести и центре тяжести.

Знать методы для определения центра тяжести тела и формулы для определения положения центра тяжести плоских фигур.

Уметь определять положение центра тяжести простых геометрических фигур, составленных из стандартных профилей.

Сила тяжести

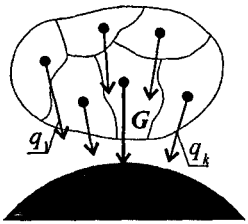


Рис. 8.1

Сила тяжести — равнодействующая сил притяжения к Земле, она распределена по всему объему тела. Силы притяжения, приложенные к частицам твердого тела, образуют систему сил, линии действия которых сходятся в центре Земли (рис. 8.1). Поскольку радиус Земли значительно больше размеров любого земного тела, силы притяжения можно считать параллельными.

Точка приложения силы тяжести

Для определения точки приложения силы тяжести (равнодействующей параллельных сил) используем теорему Вариньона о моменте равнодействующей:

Момент равнодействующей относительно оси равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно этой оси.

Изображаем тело, составленное из некоторых частей, в пространственной системе координат (рис. 8.2).

Тело состоит из частей, силы тяжести которых q_k приложены в центрах тяжести (ЦТ) этих частей.

Пусть равнодействующая (сила тяжести всего тела) приложена в неизвестном пока центре C.

x_C, y_C и z_C — координаты центра тяжести C.

x_k, y_k и z_k — координаты центров тяжести частей тела.

Из теоремы Вариньона следует:

$$M_x(\boldsymbol{F}_\Sigma)=Gy_C=\sum_0^n q_k y_k;\ y_C=\frac{\sum_0^n q_k y_k}{G};$$

$$M_y(\boldsymbol{F}_\Sigma)=Gx_C=\sum_0^n q_k x_k;\ x_C=\frac{\sum_0^n q_k x_k}{G};$$

аналогично для оси Oz:

$$M_z(\boldsymbol{F}_\Sigma)=Gz_C=\sum_0^n q_k z_k;\ z_C=\frac{\sum_0^n q_k z_k}{G}.$$

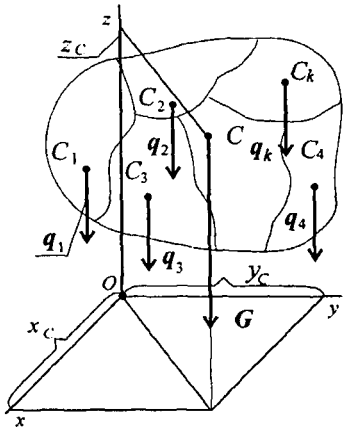


Рис. 8.2

В однородном теле сила тяжести пропорциональна объему V:

$$G=\gamma V;$$

где γ — вес единицы объема.

Следовательно, в формулах для однородных тел:

$$x_C=\frac{\sum_0^n \gamma V_k x_k}{\gamma V}=\frac{\sum_0^n V_k x_k}{V};\quad y_C=\frac{\sum_0^n \gamma V_k y_k}{\gamma V}=\frac{\sum_0^n V_k y_k}{V};\quad z_C=\frac{\sum_0^n V_k z_k}{V},$$

где V_k — объем элемента тела; V — объем всего тела.

Центр тяжести однородных плоских тел (плоских фигур)

Очень часто приходится определять центр тяжести различных плоских тел и геометрических плоских фигур сложной формы. Для плоских тел можно записать: $V = Ah$, где A — площадь фигуры, h — ее высота.

Тогда после подстановки в записанные выше формулы получим:

$$x_C=\frac{\sum_0^n A_k h x_k}{Ah}=\frac{\sum_0^n A_k x_k}{A};\quad y_C=\frac{\sum_0^n A_k h y_k}{Ah}=\frac{\sum_0^n A_k y_k}{A};\quad z_C=\frac{h}{2},$$

где A_k — площадь части сечения; x_k, y_k — координаты ЦТ частей сечения.

Выражение $\sum\limits_{0}^{n} A_k x_k$ называют *статическим моментом площади* (S_y).

Координаты центра тяжести сечения можно выразить через статический момент:

$$\sum_{0}^{n} A_k x_k = S_y; \quad x_C = \frac{S_y}{A}; \quad \sum_{0}^{n} A_k y_k = S_x; \quad y_C = \frac{S_x}{A}.$$

Оси, проходящие через центр тяжести, называются центральными осями. Статический момент относительно центральной оси равен нулю.

Определение координат центра тяжести плоских фигур

Примечание. Центр тяжести симметричной фигуры находится на оси симметрии.

Центр тяжести стержня находится на середине высоты. Положения центров тяжести простых геометрических фигур могут быть рассчитаны по известным формулам (рис. 8.3: а) — круг; б) — квадрат, прямоугольник; в) — треугольник; г) — полукруг).

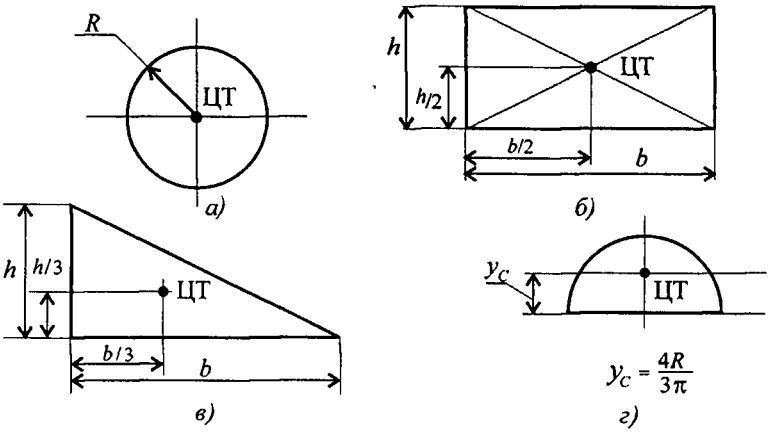


Рис. 8.3

При решении задач используются следующие методы:

1) метод симметрии: центр тяжести симметричных фигур находится на оси симметрии;

2) метод разделения: сложные сечения разделяем на несколько простых частей, положение центров тяжести которых легко определить;

3) метод отрицательных площадей: полости (отверстия) рассматриваются как часть сечения с отрицательной площадью.

Примеры решения задач

Пример 1. Определить положение центра тяжести фигуры, представленной на рис. 8.4.

Решение

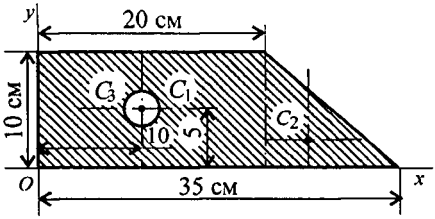


Рис. 8.4

Разбиваем фигуру на три части:

1 — прямоугольник, $A_1 = 10 \cdot 20 = 200\,\text{см}^2$;

2 — треугольник, $A_2 = 1/2 \cdot 10 \cdot 15 = 75\,\text{см}^2$;

3 — круг, $A_3 = \pi R^2$; $A_3 = 3{,}14 \cdot 3^2 = 28{,}3\,\text{см}^2$.

ЦТ фигуры 1: $x_1 = 10$ см; $y_1 = 5$ см.

ЦТ фигуры 2: $x_2 = 20 + 1/3 \cdot 15 = 25$ см; $y_2 = 1/3 \cdot 10 = 3{,}3$ см.

ЦТ фигуры 3: $x_3 = 10$ см; $y_3 = 5$ см;

$$x_C = \frac{200 \cdot 10 + 75 \cdot 25 - 28{,}3 \cdot 10}{200 + 75 - 28{,}3} = 14{,}5 \text{ см.}$$

Аналогично определяется $y_C = 4{,}5$ см.

Пример 2. Определить координаты центра тяжести составного сечения. Сечение состоит из листа и прокатных профилей (рис. 8.5).

Примечание. Часто рамы сваривают из разных профилей, создавая необходимую конструкцию. Таким образом, уменьшается расход металла и образуется конструкция высокой прочности.

Для стандартных прокатных профилей собственные геометрические характеристики известны. Они приводятся в соответствующих стандартах.

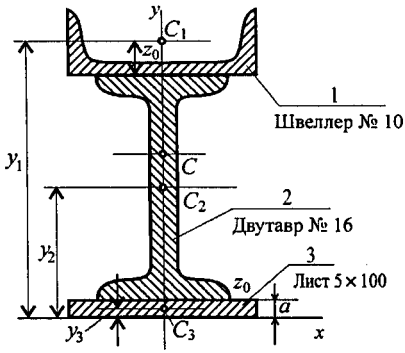


Рис. 8.5

Решение

1. Обозначим фигуры номерами и выпишем из таблиц необходимые данные:

1 — швеллер № 10 (ГОСТ 8240–89); высота $h = 100$ мм; ширина полки $b = 46$ мм; площадь сечения $A_1 = 10{,}9$ см^2;

2 — двутавр № 16 (ГОСТ 8239–89); высота 160 мм; ширина полки 81 мм; площадь сечения $A_2 = 20{,}2$ см^2;

3 — лист 5×100; толщина 5 мм; ширина 100 мм; площадь сечения $A_3 = 0{,}5 \cdot 10 = 5$ см^2.

2. Координаты центров тяжести каждой фигуры можно определить по чертежу.

Составное сечение симметрично, поэтому центр тяжести находится на оси симметрии и координата $x_C = 0$.

Швеллер 1: $y_1 = a + h_2 + z_0$; $y_1 = 0{,}5 + 16 + 1{,}44 = 17{,}54$ см.

Двутавр 2: $y_2 = a + \dfrac{h_2}{2}$; $y_2 = 0{,}5 + 16/2 = 8{,}5$ см.

Лист 3: $y_3 = a/2 = 0{,}25$ см.

3. Определение центра тяжести составного сечения:

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3},$$

$$y_C = \frac{10{,}9 \cdot 17{,}54 + 20{,}2 \cdot 8{,}5 + 5 \cdot 0{,}25}{10{,}9 + 20{,}2 + 5} = 10 \text{ см}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Почему силы притяжения к Земле, действующие на точки тела, можно принять за систему параллельных сил?

2. Запишите формулы для определения положения центра тяжести неоднородных и однородных тел, формулы для определения положения центра тяжести плоских сечений.

3. Повторите формулы для определения положения центра тяжести простых геометрических фигур: прямоугольника, треугольника, трапеции и половины круга.

4. Что называют статическим моментом площади?

5. Вычислите статический момент данной фигуры относительно оси Ox. $h = 30$ см; $b = 120$ см; $c = 10$ см (рис. 8.6).

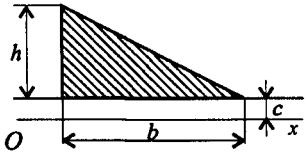


Рис. 8.6

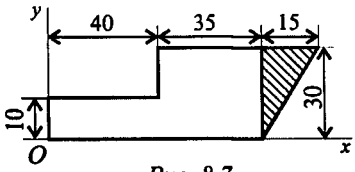


Рис. 8.7

6. Определите координаты центра тяжести заштрихованной фигуры (рис. 8.7). Размеры даны в мм.

7. Определите координату y фигуры 1 составного сечения (рис. 8.8).

При решении воспользоваться справочными данными таблиц ГОСТ «Сталь горячекатанная» (см. Приложение 1).

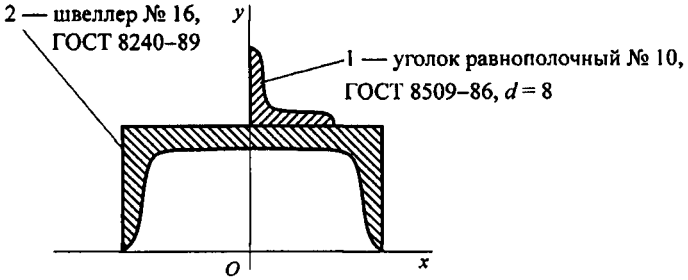


Рис. 8.8

ЛЕКЦИЯ 9

Тема 1.7. Основные понятия кинематики. Кинематика точки

Иметь представление о пространстве, времени, траектории, пути, скорости и ускорении.

Знать способы задания движения точки (естественный и координатный).

Знать обозначения, единицы измерения, взаимосвязь кинематических параметров движения, формулы для определения скоростей и ускорений (без вывода).

Кинематика рассматривает движение как перемещение в пространстве. Причины, вызывающие движение, не рассматриваются. Кинематика устанавливает способы задания движения и определяет методы определения кинематических параметров движения.

Основные кинематические параметры

Траектория

Линию, которую очерчивает материальная точка при движении в пространстве, называют *траекторией.*

Траектория может быть прямой и кривой, плоской и пространственной линией.

Уравнение траектории при плоском движении: $y = f(x)$.

Пройденный путь

Путь измеряется вдоль траектории в направлении движения. Обозначение — S, единицы измерения — метры.

Уравнение движения точки

Уравнение, определяющее положение движущейся точки в зависимости от времени, называется *уравнением движения.*

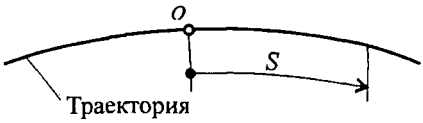


Рис. 9.1

Положение точки в каждый момент времени можно определить по расстоянию, пройденному вдоль траектории от некоторой неподвижной точки, рассмат-

риваемой как начало отсчета (рис. 9.1). Такой способ задания движения называется *естественным*.

Таким образом, уравнение движения можно представить в виде $S = f(t)$. Положение точки можно также определить, если известны ее координаты в зависимости от времени (рис. 9.2). Тогда в случае движения на плоскости должны быть заданы два уравнения:

$$\begin{cases} x = f_1(t); \\ y = f_2(t). \end{cases}$$

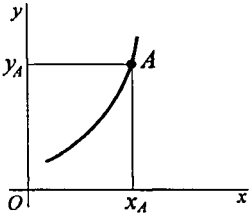


Рис. 9.2

В случае пространственного движения добавляется и третья координата $z = f_3(t)$.

Такой способ задания движения называют *координатным*.

Скорость движения

Векторная величина, характеризующая в данный момент быстроту и направление движения по траектории, называется *скоростью*.

Скорость — вектор, в любой момент направленный по касательной к траектории в сторону направления движения (рис. 9.3).

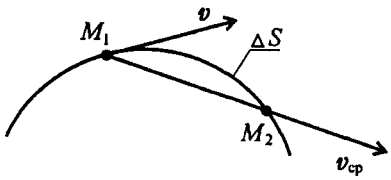


Рис. 9.3

Если точка за равные промежутки времени проходит равные расстояния, то движение называют *равномерным*.

Средняя скорость на пути ΔS определяется как

$$v_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где ΔS — пройденный путь за время Δt; Δt — промежуток времени.

Если точка за равные промежутки времени проходит неравные пути, то движение называют *неравномерным*.

В этом случае скорость — величина переменная и зависит от времени $v = f(t)$.

При рассмотрении малых промежутков времени ($\Delta t \to 0$) средняя скорость становится равной истинной скорости движения в данный момент. Поэтому скорость в данный момент определяют как

производную пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt}.$$

За единицу скорости принимают 1 м/с. Иногда скорость измеряют в км/ч, $1\,\text{км/ч} = \frac{1000}{3600} = 0{,}278\,\text{м/с}$.

Ускорение точки

Векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости по величине и направлению, называется *ускорением точки.*

Скорость точки при перемещении из точки M_1 в точку M_2 меняется по величине и направлению. Среднее значение ускорения за этот промежуток времени

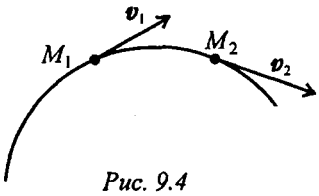


Рис. 9.4

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ (рис. 9.4).}$$

При рассмотрении бесконечно малого промежутка времени среднее ускорение превратится в ускорение в данный момент:

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Обычно для удобства рассматривают две взаимно перпендикулярные составляющие ускорения: нормальное и касательное (рис. 9.5).

Нормальное ускорение a_n характеризует изменение скорости по направлению и определяется как

$$a_n = \frac{v^2}{r},$$

где r — радиус кривизны траектории в данный момент времени.

Нормальное ускорение всегда направлено перпендикулярно скорости к центру дуги.

Касательное ускорение a_t характеризует изменение скорости по величине и всегда направлено по касательной к траектории; при ускорении его направление *совпадает* с направлением скорости, а

при замедлении оно направлено *противоположно* направлению вектора скорости.

Формула для определения касательного ускорения имеет вид:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = v' = S''.$$

Значение *полного* ускорения определяется как $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ (рис. 9.6).

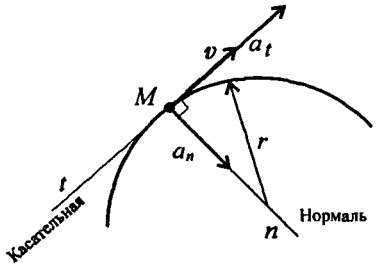


Рис. 9.5

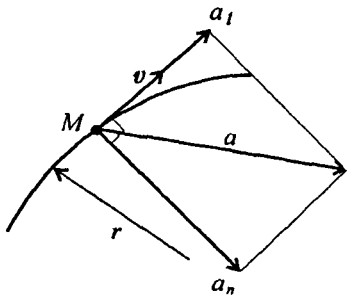


Рис. 9.6

Примеры решения задач

Пример 1. Дано уравнение движения точки: $S = 0{,}36t^2 + 0{,}18t$. Определить скорость точки в конце третьей секунды движения и среднюю скорость за первые 3 секунды.

Решение

1. Уравнение скорости $v = \dfrac{dS}{dt}$; $S' = 2 \cdot 0{,}36t + 0{,}18$; $v = 0{,}72t + 0{,}18$.

2. Скорость в конце третьей секунды ($t = 3\,c$) $v_3 = 0{,}72 \cdot 3 + 0{,}18 = 2{,}34$ м/с.

3. Средняя скорость $v_{ср} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$; $v_{ср} = (0{,}36 \cdot 3^2 + 0{,}18 \cdot 3)/3 = 1{,}26$ м/с.

Пример 2. Точка движется по кривой радиуса $r = 10$ м согласно уравнению $S = 2{,}5t^2 + 1{,}2t + 2{,}5$ (рис. 9.6).

Определить полное ускорение точки в конце второй секунды движения и указать направление касательной и нормальной составляющих ускорения в точке M.

Решение

1. Касательное ускорение определяется как $a_t = \dfrac{dv}{dt}$.

Уравнение скорости: $v = \dfrac{dS}{dt}$.

Скорость будет равна $v = 2 \cdot 2{,}5t + 1{,}2$; $v = 5t + 1{,}2$ (м/с).

Касательное ускорение: $a_t = v' = 5\,\text{м/с}^2$.

Вывод: касательное ускорение не зависит от времени, оно постоянно.

2. Нормальное ускорение: $a_n = \dfrac{v^2}{r}$.

Скорость на второй секунде будет равна $v_2 = 5{\cdot}2{+}1{,}2 = 11{,}2\,\text{м/с}$.

Величина нормального ускорения: $a_{n2} = \dfrac{(11{,}2)^2}{10} = 12{,}54\,\text{м/с}^2$.

3. Полное ускорение: $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

Полное ускорение в конце второй секунды:

$a_2 = \sqrt{5^2 + 12{,}54^2} = 13{,}5\,\text{м/с}^2$.

4. Нормальное ускорение направлено перпендикулярно скорости к центру дуги.

Касательное ускорение направлено по касательной к кривой и совпадает с направлением скорости, т. к. касательное ускорение — положительная величина (скорость растет).

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите в общем виде закон движения в естественной и координатной форме.

2. Что называют траекторией движения?

3. Как определяется скорость движения точки при естественном способе задания движения?

4. Запишите формулы для определения касательного, нормального и полного ускорений.

5. Что характеризует касательное ускорение и как оно направлено по отношению к вектору скорости?

6. Что характеризует и как направлено нормальное ускорение?

ЛЕКЦИЯ 10

Тема 1.8. Кинематика точки

Иметь представление о скоростях средней и истинной, об ускорении при прямолинейном и криволинейном движениях, о различных видах движения точки.

Знать формулы (без вывода) и графики равномерного и равнопеременного движений точки.

Уметь определять параметры движения точки по заданному закону движения, строить и читать кинематические графики.

Анализ видов и кинетических параметров движений

Равномерное движение

Равномерное движение — это движение с постоянной скоростью:

$$v = \text{const}.$$

Для прямолинейного равномерного движения (рис. 10.1а)

$$a_t = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_t = 0;$$

$$r = \infty \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{r} = 0.$$

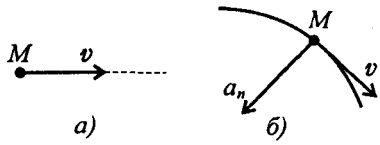


Рис. 10.1

Полное ускорение движения точки равно нулю: $a = 0$.

При криволинейном равномерном движении (рис. 10.1б)

$$r \neq \infty \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{r} \neq 0.$$

Полное ускорение равно нормальному ускорению: $a = a_n$.

Уравнение (закон) движения точки при равномерном движении можно получить, проделав ряд несложных операций.

Так как $v = \text{const}$, закон равномерного движения в общем виде является уравнением прямой: $S = S_0 + vt$, где S_0 — путь, пройденный до начала отсчета.

Равнопеременное движение

Равнопеременное движение — это движение с постоянным касательным ускорением:

$$a_t = \text{const}.$$

Для прямолинейного равнопеременного движения

$$r = \infty \Rightarrow a_n = 0; \quad a = a_t = \text{const}.$$

Полное ускорение равно касательному ускорению.

Криволинейное равнопеременное движение (рис. 10.2):

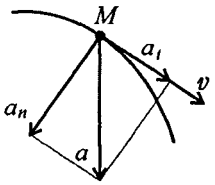


Рис. 10.2

$$a_n \neq 0; \quad a_t = \text{const} \neq 0.$$

Учитывая, что $a_t = \dfrac{dv}{dt}$; $a_t = \text{const}$ и сделав ряд преобразований:

$$dv = a_t dt; \quad \int\limits_v dv = a_t \int\limits_t dt,$$

получим значение скорости при равнопеременном движении

$$v = v_0 + a_t t; \quad v = \frac{dS}{dt}.$$

После интегрирования будем иметь закон равнопеременного движения в общем виде, представляющий уравнение параболы:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2},$$

где v_0 — начальная скорость движения;

S_0 — путь, пройденный до начала отсчета;

a_t — постоянное касательное ускорение.

Неравномерное движение

При *неравномерном движении* численные значения скорости и ускорения меняются.

Уравнение неравномерного движения в общем виде представляет собой уравнение третьей $S = f(t^3)$ и выше степени.

Кинематические графики

Кинематические графики — это графики изменения пути, скорости и ускорений в зависимости от времени.

Равномерное движение (рис. 10.3)

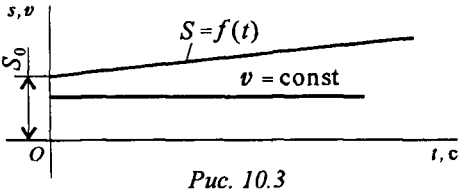


Рис. 10.3

Равнопеременное движение (рис. 10.4)

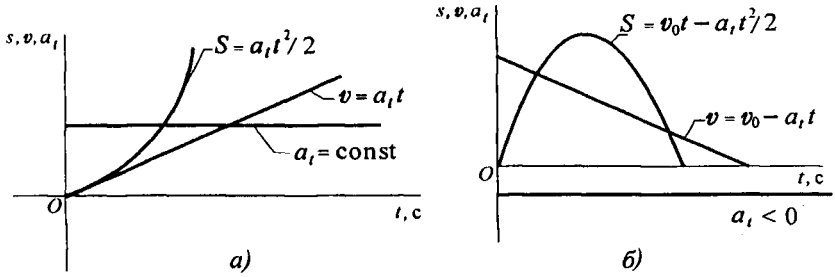


Рис. 10.4

Примеры решения задач

Пример 1. По заданному закону движения $S = 10 + 20t - 5t^2$ ($[S]$ = м; $[t]$ = с) определить вид движения, начальную скорость и касательное ускорение точки, время до остановки.

(Рекомендуется обойтись без расчетов, использовать метод сравнения заданного уравнения с уравнениями различных видов движений в общем виде.)

Решение

1. Вид движения: равнопеременное ($S = S_0 + v_0 t + \dfrac{a_t t^2}{2}$).

2. При сравнении уравнений очевидно, что

— начальный путь, пройденный до начала отсчета 10 м;

— начальная скорость 20 м/с;

— постоянное касательное ускорение $\frac{a_t}{2} = -5\,\text{м/с}^2$; $a_t = -10\,\text{м/с}^2$.

— ускорение отрицательное, следовательно, движение замедленное (равнозамедленное), ускорение направлено в сторону, противоположную направлению скорости движения.

3. Можно определить время, при котором скорость точки будет равна нулю: $v = S' = 20 - 2 \cdot 5t$; $v = 20 - 10t$; $v = 0$; $t = \frac{20}{10} = 2\,\text{с}$.

Примечание. Если при равнопеременном движении скорость растет, значит, ускорение — положительная величина, график пути — вогнутая парабола. При торможении скорость падает, ускорение (замедление) — отрицательная величина, график пути — выпуклая парабола (рис. 10.4).

Пример 2. Точка движется по желобу из точки A в точку D (рис. 10.5).

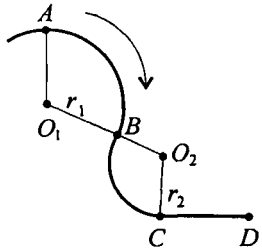


Рис. 10.5

Как изменятся касательное и нормальное ускорения при прохождении точки через B и C?

Скорость движения считать постоянной. Радиус участка AB = 10 м, радиус участка BC = 5 м.

Решение

1. Рассмотрим участок AB.

Касательное ускорение равно нулю ($v = \text{const}$).

Нормальное ускорение $\left(a_n = \frac{v^2}{r}\right)$ при переходе через точку B увеличивается в 2 раза, оно меняет направление, т. к. центр дуги AB не совпадает с центром дуги BC.

2. На участке BC:

— касательное ускорение равно нулю: $a_t = 0$;

— нормальное ускорение при переходе через точку C меняется: до точки C движение вращательное, после точки C движение становится прямолинейным, нормальное напряжение на прямолинейном участке равно нулю.

3. На участке CD полное ускорение равно нулю.

Пример 3. По заданному графику скорости найти путь, пройденный за время движения (рис. 10.6).

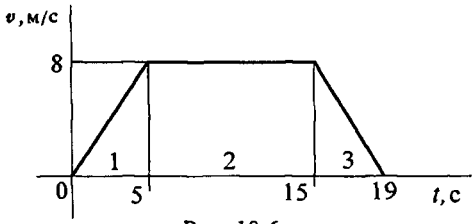


Рис. 10.6

Решение

1. По графику следует рассмотреть три участка движения.

Первый участок — разгон из состояния покоя (равноускоренное движение).

Уравнение скорости $v_1 = v_0 + a_1 t_1$; $v_0 = 0$.

Ускорение $a_1 = \dfrac{v_1}{t_1}$; $a_1 = \dfrac{8}{5} = 1{,}6\,\text{м/с}^2$.

Второй участок — равномерное движение: $v = 8\,\text{м/с}$; $a_2 = 0$.

Третий участок — торможение до остановки (равнозамедленное движение).

Уравнение скорости $v_3 = v_{03} + a_3 t_3$; $v_3 = 0$.

Ускорение $a_3 = -\dfrac{v_{03}}{t_3}$; $a_3 = -\dfrac{8}{4} = -2\,\text{м/с}^2$.

2. Путь, пройденный за время движения, будет равен:

первый участок: $S_1 = S_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$; $S_0 = 0$; $v_0 = 0$;

$$S_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}; \quad S_1 = \frac{1{,}6 \cdot 5^2}{2} = 20\,\text{м/с};$$

второй участок: $S_2 = vt_2 = 8 \cdot 10 = 80\,\text{м/с}$;

третий участок: $S_3 = S_{03} + v_{03} t_3 + \dfrac{a_3 t_3^2}{2}$; $S_{03} = S_1 + S_2$;

$v_{03} = 8$ м/с; $a_3 = -2$ м/с^2.

Путь за время движения

$$S_\Sigma = S_3 = 100 + 8 \cdot 4 + \frac{-2 \cdot 4^2}{2} = 116 \text{ м}.$$

Пример 4. Тело, имевшее начальную скорость 36 км/ч, прошло 50 м до остановки. Считая движение равнозамедленным, определить время торможения.

Решение

1. Записываем уравнение скорости для равнозамедленного движения:

$$v = v_0 + at = 0.$$

Определяем начальную скорость в м/с: $v_0 = \dfrac{36 \cdot 1000}{3600} = 10\,\text{м/с}$.

Выразим ускорение (замедление) из уравнения скорости: $a = -\dfrac{v_0}{t}$.

2. Записываем уравнение пути: $S = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$.

После подстановки получим: $S = \dfrac{v_0 t}{2}$.

3. Определяем время до полной остановки (время торможения):

$$t = \frac{2S}{v_0} = \frac{2 \cdot 50}{10} = 10\,\text{с}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите формулу ускорения при прямолинейном движении.

2. Запишите формулу ускорения (полного) при криволинейном движении.

3. Тело скатывается по желобу (рис. 10.7). Какие параметры движения меняются при переходе через точку B и почему?

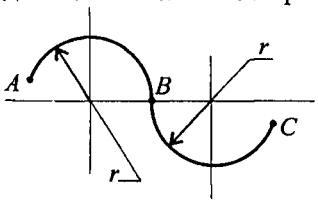


Рис. 10.7

Ответы:
1. a_n.
2. a_t.
3. v.
4. Параметры движения не меняются.

4. По заданному уравнению движения точки $S = 25 + 1{,}5t + 6t^2$ определите вид движения и без расчетов, используя законы движения точки, ответьте, чему равны начальная скорость и ускорение.

5. По заданному уравнению движения точки $S = 22t - 4t^2$ постройте графики скорости и касательного ускорения.

6. По графику скоростей точки определите путь, пройденный за время движения (рис. 10.8).

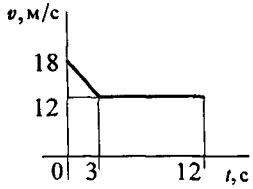


Рис. 10.8

7. Точка движется по дуге. Охарактеризуйте движение точки (рис. 10.9).

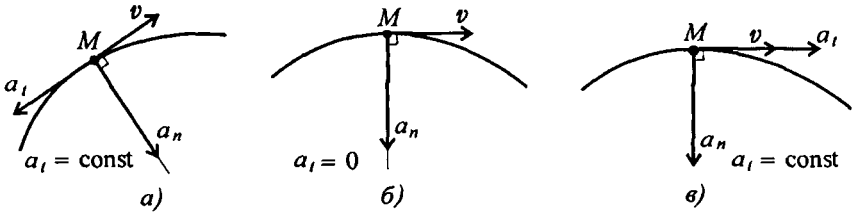
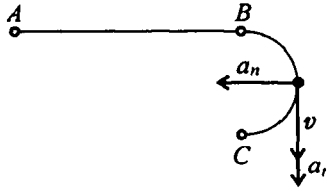


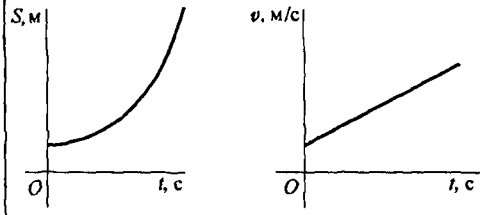
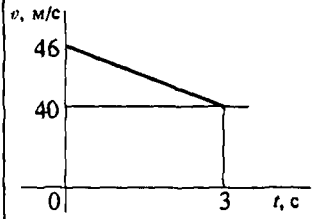
Рис. 10.9

8. Ответьте на вопросы тестового задания.

Темы 1.7, 1.8. Кинематика. Кинематика точки

Вопросы	Ответы	Код
1. Точка движется по линии ABC. По изображенным параметрам движения определить вид движения. 	Равномерное	1
	Равноускоренное	2
	Равнозамедленное	3
	Неравномерное	4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
2. По приведенным кинематическим графикам определить вид движения точки. 	$S = vt$	1
	$S = S_0 + \frac{at^2}{2}$	2
	$S = S_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$	3
	$S = v_0t - \frac{at^2}{2}$	4
3. Автомобиль движется по арочному мосту согласно уравнению $S = 12t$. Определить полное ускорение автомобиля, если радиус моста $r = 100$ м, время движения $t = 5$ с.	$a = 1,44$ м/с^2	1
	$a = 0,12$ м/с^2	2
	$a = 0,6$ м/с^2	3
	$a = 36$ м/с^2	4
4. По графику скорости определить время движения точки до полной остановки. Закон движения не меняется. 	$t_{ост} = 6$ с	1
	$t_{ост} = 12$ с	2
	$t_{ост} = 23$ с	3
	$t_{ост} = 43$ с	4
5. Тело, двигаясь из состояния покоя равноускоренно, за 10 с достигло скорости 45 м/с. Определить путь, пройденный за время движения.	105 м	1
	125 м	2
	22,5 м	3
	225 м	4

ЛЕКЦИЯ 11

Тема 1.9. Простейшие движения твердого тела

Иметь представление о поступательном движении, его особенностях и параметрах, о вращательном движении тела и его параметрах.

Знать формулы для определения параметров поступательного и вращательного движений тела.

Уметь определять кинематические параметры тела при поступательном и вращательном движениях, определять параметры любой точки тела.

Поступательное движение

Поступательным называют такое движение твердого тела, при котором всякая прямая линия на теле при движении остается параллельной своему начальному положению (рис. 11.1, 11.2).

При поступательном движении все точки тела движутся одинаково: скорости и ускорения в каждый момент одинаковы. Поэтому для описания движения тела можно рассматривать движение одной его точки, обычно центра масс.

Поступательное движение может быть прямолинейным и криволинейным.

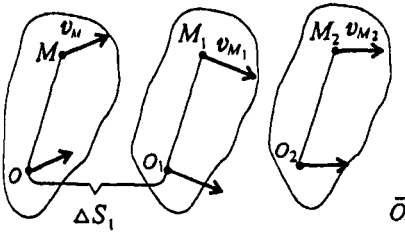


Рис. 11.1

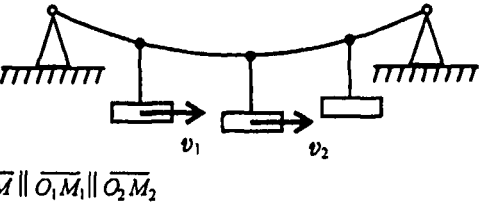


Рис. 11.2

Вращательное движение

При вращательном движении все точки тела описывают окружности вокруг общей неподвижной оси.

Неподвижная ось, вокруг которой вращаются все точки тела называется *осью вращения.*

При этом каждая точка движется по окружности, радиус которой равен расстоянию точки до оси вращения. Точки на оси вращения не перемещаются.

Для описания вращательного движения тела вокруг неподвижной оси можно использовать только угловые параметры (рис. 11.3):

φ — угол поворота тела, $[\varphi] =$ рад;

ω — угловая скорость, определяет изменение угла поворота в единицу времени, $[\omega] =$ рад/с.

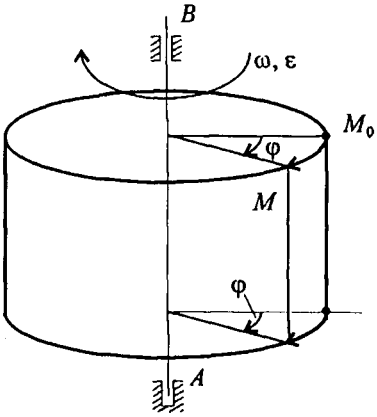


Рис. 11.3

Для определения положения тела в любой момент времени используется уравнение $\varphi = f(t)$.

Следовательно, для определения угловой скорости можно пользоваться выражением $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$.

Иногда для оценки быстроты вращения используют угловую частоту вращения n, которая оценивается в оборотах в минуту.

Угловая скорость и частота вращения физически близкие величины:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

Изменение угловой скорости во времени определяется угловым ускорением ε, $[\varepsilon] =$ рад/с^2;

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Частные случаи вращательного движения

Равномерное вращение (угловая скорость постоянна):

$$\omega = \text{const}.$$

Уравнение (закон) равномерного вращения в данном случае имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

где φ_0 — угол поворота до начала отсчета.

Кинематические графики для этого вида движения изображены на рис. 11.4.

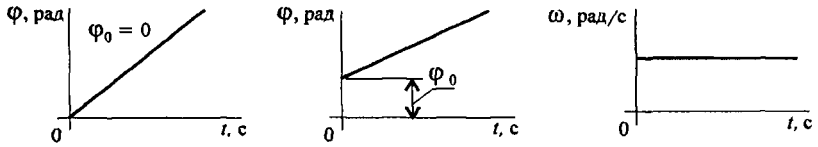


Рис. 11.4

Равнопеременное вращение (угловое ускорение постоянно):

$$\varepsilon = \text{const}.$$

Уравнение (закон) равнопеременного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где ω_0 — начальная угловая скорость.

Угловое ускорение *при ускоренном* движении — величина *положительная*; угловая скорость будет все время возрастать.

Угловое ускорение *при замедленном* движении — величина *отрицательная*; угловая скорость убывает.

Для данного движения кинематические графики представлены на рис. 11.5.

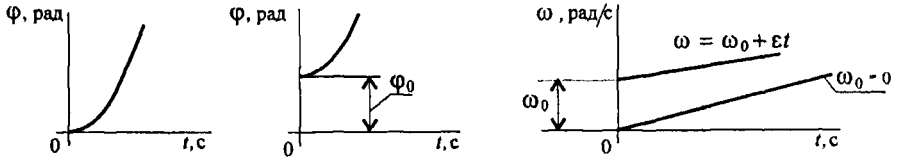


Рис. 11.5

Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Тело вращается вокруг точки O. Определим параметры движения точки A, расположенной на расстоянии r_A от оси вращения (рис. 11.6, 11.7).

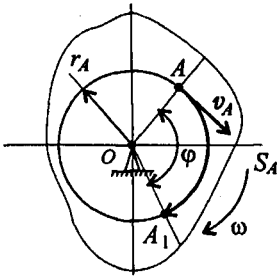


Рис. 11.6

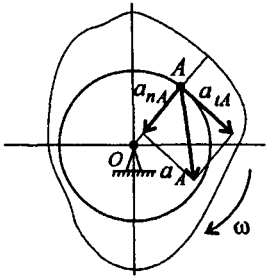


Рис. 11.7

Путь точки A: $S_A = \varphi r_A$.

Линейная скорость точки A: $v_A = \omega r_A$.

Ускорения точки A: $a_{tA} = \varepsilon r_A$ — касательное; $a_{nA} = \omega^2 r_A$ — нормальное, где r_A — радиус окружности, траектории точки A.

Примеры решения задач

Пример 1. По заданному графику угловой скорости (рис. 11.8) определить вид вращательного движения.

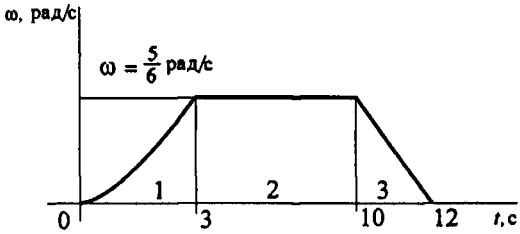


Рис. 11.8

Решение

1. Участок 1 — неравномерное ускоренное движение, $\omega = \varphi'$; $\varepsilon = \omega'$.

2. Участок 2 — скорость постоянна — движение равномерное, $\omega = \text{const}$.

3. Участок 3 — скорость убывает равномерно — равнозамедленное движение, $\varepsilon = \omega' < 0$.

Пример 2. Ротор электродвигателя вращается со скоростью, описываемой уравнением $\omega = 2\pi t$. Определить вид движения.

Решение

1. Анализируем выражение для скорости: скорость меняется и зависит от времени линейно. Следовательно, угловое ускорение — постоянно, $\varepsilon = \omega' = 2\pi = \text{const}$.

2. Движение равнопеременное (равноускоренное, т. к. ускорение положительно).

Пример 3. Тело вращалось равноускоренно из состояния покоя и сделало 360 оборотов за 2 мин. Определить угловое ускорение.

Решение

1. Один оборот равен 2π радиан. Следовательно:

$$360\,\text{оборотов} = 720\pi\,\text{рад}, \quad \varphi = 720\pi\,\text{рад}.$$

2. Закон равнопеременного вращательного движения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

В данном случае $\varphi_0 = 0$; $\omega_0 = 0$.

Следовательно, $\varphi = \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$.

Откуда $\varepsilon = \dfrac{2\varphi}{t^2}$.

3. Угловое ускорение равно $\varepsilon = \dfrac{2 \cdot 720 \cdot \pi}{(120)^2} = 0{,}314\,\text{рад/с}^2$.

Пример 4. Тело вращалось с угловой частотой 1200 об/мин. Затем движение стало равнозамедленным, и за 30 секунд скорость упала до 900 об/мин. Определить число оборотов тела за это время и время до полной остановки.

Решение

1. Построить график изменения скорости за 30 с (рис. 11.9).

Определяем угловую скорость вращения тела:

$$\omega_0 = \frac{1200 \cdot \pi}{30} = 40\pi\,\text{рад/с}; \qquad \omega = \frac{900\pi}{30} = 30\pi\,\text{рад/с}.$$

Определяем угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{30\pi - 40\pi}{30} = -\frac{1}{3}\pi \text{ рад/с}^2.$$

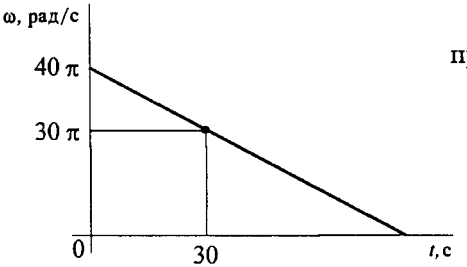


Рис. 11.9

Определяем угол поворота за прошедшее время:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\varphi_0 = 0;$$

$$\varphi = 40\pi \cdot 30 - \frac{1}{3}\frac{\pi \cdot (30)^2}{2};$$

$$\varphi = 1050\pi \text{ рад}.$$

Число оборотов за 30 с: $z = \dfrac{\varphi}{2\pi} = \dfrac{1050\pi}{2\pi} = 525$ об.

2. Определяем время до полной остановки.
Скорость при остановке равна нулю, $\omega = 0$.
Таким образом, $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$; $0 = \omega_0 + \varepsilon t$.
Тогда $t_{\text{ост}} = -\dfrac{\omega_0}{\varepsilon}$; $t_{\text{ост}} = \dfrac{40\pi \cdot 3}{\pi} = 120$ с.

Пример 5. Маховое колесо вращается равномерно со скоростью 120 об/мин (рис. 11.10). Радиус колеса 0,3 м. Определить скорость и полное ускорение точек на ободе колеса, а также скорость точки, находящейся на расстоянии 0,15 м от центра.

Решение

1. Угловая скорость
$\omega = \dfrac{\pi n}{30} = \dfrac{3{,}14 \cdot 120}{30} \approx 12{,}56$ рад/с.
2. Линейная скорость на ободе колеса
$v = \omega r$; $v_A = \omega r_A$; $v_A = 12{,}56 \cdot 0{,}3 = 3{,}77$ м/с.
3. Скорость в точке C (рис. 11.10)
$v_C = \omega r_C$; $v_C = 12{,}56 \cdot 0{,}15 = 1{,}88$ м/с.
4. Угловое ускорение $\varepsilon = \omega' = 0$.

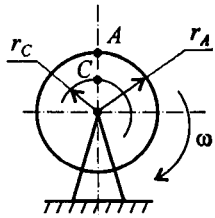


Рис. 11.10

Касательное ускорение точки A $a_{tA} = 0$; нормальное ускорение точки A $a_{nA} = \omega^2 r_A$; $a_{nA} = (12{,}56)^2 \cdot 0{,}3 = 47{,}3\,\text{м/с}^2$.

5. Полное ускорение точек на ободе колеса

$$a_A = \sqrt{a_{tA}^2 + a_{nA}^2}; \quad a_A = a_{nA} = 47{,}3\,\text{м/с}^2.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какими кинематическими параметрами характеризуется поступательное движение и почему?

2. Запишите уравнение равномерного поступательного движения твердого тела.

3. Запишите уравнение равнопеременного поступательного движения твердого тела.

4. Запишите уравнения равномерного и равнопеременного вращательного движений твердого тела.

5. Задано уравнение движения тела $S = f(t)$. Как определяют скорость и ускорение?

6. Для заданного закона (уравнения) движения $\varphi = 6{,}28 + 12t + 3t^2$ выберите соответствующий кинематический график движения (рис. 11.11).

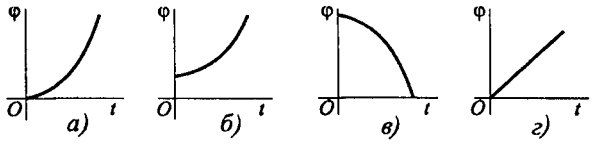


Рис. 11.11

7. Для движения, закон которого задан в вопросе 6, определите угловое ускорение в момент $t = 5\,\text{с}$.

ЛЕКЦИЯ 12

Тема 1.10. Сложное движение точки. Сложное движение твердого тела

Иметь представление о системах координат, об абсолютном, относительном и переносном движениях.

Знать разложение сложного движения на относительное и переносное, теорему сложения скоростей.

Знать разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное, способы определения мгновенного центра скоростей.

Основные определения

Сложным движением считают движение, которое можно разложить на несколько простых. Простыми движениями считают поступательное и вращательное.

Для рассмотрения сложного движения точки выбирают две системы отсчета: подвижную и неподвижную.

Движение точки (тела) относительно *неподвижной* системы отсчета называют *сложным*, или *абсолютным*.

Подвижную систему отсчета обычно связывают с движущимся телом. Движение *подвижной* системы отсчета относительно неподвижной называют *переносным*.

Движение материальной точки (тела) по отношению к подвижной системе называют *относительным*.

Примером может служить движение человека по эскалатору метро. Движение эскалатора — переносное движение, движение человека вниз или вверх по эскалатору — относительное, а движение по отношению к неподвижным стенам станции — сложное (абсолютное) движение.

При решении задач используют теорему о сложении скоростей:

При сложном движении точки абсолютная скорость в каждый момент времени равна геометрической сумме переносной (v_e) *и относительной* (v_r) *скоростей:*

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos\alpha},$$

α — угол между векторами $\boldsymbol{v}_e$ и $\boldsymbol{v}_r$.

Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным, или *плоским*, называется такое движение твердого тела, при котором все точки тела перемещаются параллельно некоторой неподвижной в рассматриваемой системе отсчета плоскости.

Плоскопараллельное движение можно изучать, рассматривая любое плоское сечение тела, параллельное неподвижной плоскости, называемой *основной* (рис. 12.1).

Все точки тела, расположенные на прямой, перпендикулярной к основной плоскости, движутся одинаково.

Плоскопараллельное движение изучается двумя методами: методом разложения сложного движения на поступательное и вращательное и методом мгновенных центров скоростей.

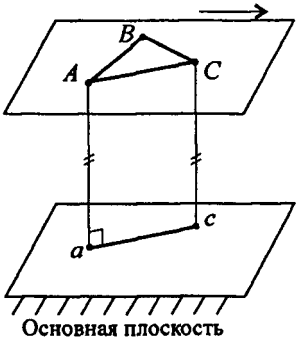


Рис. 12.1

Метод разложения сложного движения на поступательное и вращательное

Плоскопараллельное движение раскладывают на два движения: *поступательное* вместе с некоторым полюсом и *вращательное* относительно этого полюса.

Разложение используют для определения скорости любой точки тела, применяя теорему о сложении скоростей (рис. 12.2).

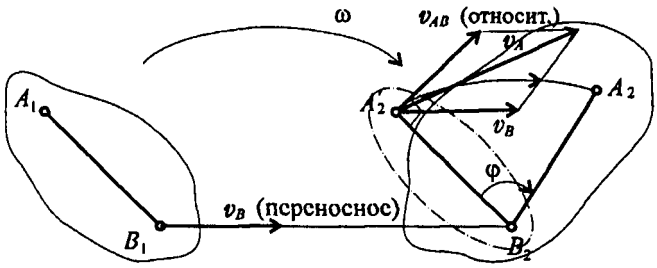


Рис. 12.2

Точка A движется вместе с точкой B, а затем поворачивается

вокруг B с угловой скоростью ω, тогда абсолютная скорость точк A будет равна

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{AB}, \quad v_{AB} = \omega r \quad (r = AB).$$

Примером плоскопараллельного движения может быть движение колеса на прямолинейном участке дороги (рис. 12.3).

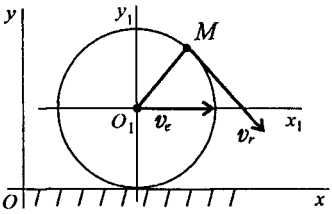


Рис. 12.3

Скорость точки M

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r,$$

$\boldsymbol{v}_e$ — скорость центра колеса переносная
$\boldsymbol{v}_r$ — скорость вокруг центра относительная.
yOx — неподвижная система координат
$y_1O_1x_1$ — подвижная система координат, связанная с осью колеса.

Метод определения мгновенного центра скоростей

Скорость любой точки тела можно определять с помощью *мгновенного центра скоростей.* При этом сложное движение представляют в виде цепи вращений вокруг разных центров.

Задача сводится к определению положения мгновенного центра вращений (скоростей) (рис. 12.4).

Мгновенным центром скоростей (МЦС) является точка на плоскости, абсолютная скорость которой в данный момент равна нулю.

Вокруг этой точки тело совершает поворот со скоростью ω.

Скорость точки A в данный момент равна

$$v_A = \omega OA,$$

т. к. v_A — линейная скорость точки A, вращающейся вокруг МЦС.

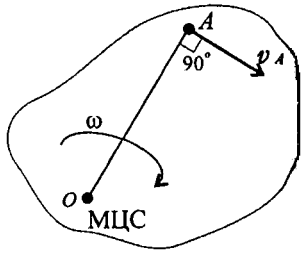


Рис. 12.4

Существуют три способа определения положения мгновенного центра скоростей.

Первый способ. Известна скорость одной точки тела v_A и угловая скорость вращения тела ω (рис. 12.5).

Точку O находим на перпендикуляре к вектору скорости $\boldsymbol{v}_A$.

$AO = \dfrac{v_A}{\omega}$.

Соединяем точку O с точкой B, замеряем расстояние OB. $\boldsymbol{v}_B \perp OB$, $v_B = \omega OB$.

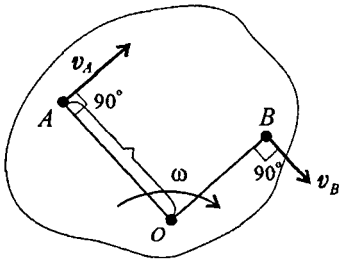


Рис. 12.5

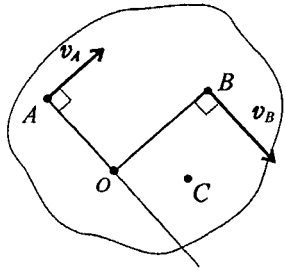


Рис. 12.6

Второй способ. Известны скорости двух точек тела $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$, и они не параллельны (рис. 12.6).

Проводим из точек A и B два перпендикуляра к известным векторам скоростей.

На пересечении перпендикуляров находим МЦС. Далее можно найти скорость любой точки C. $\dfrac{v_C}{v_B} = \dfrac{OC}{OB}$.

Третий способ. Известны скорости двух точек тела, и они параллельны ($\boldsymbol{v}_A \| \boldsymbol{v}_B$) (рис. 12.7).

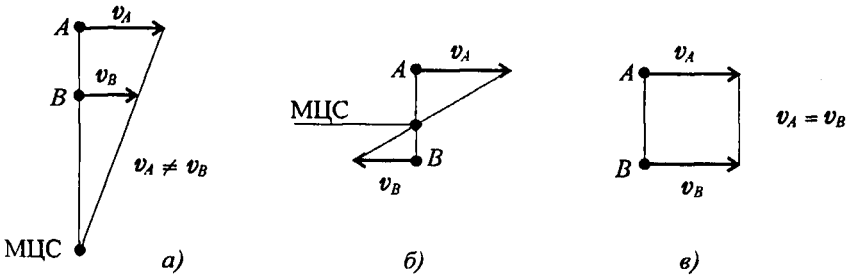


Рис. 12.7

Соединяем концы векторов, МЦС находится на пересечении линии, соединяющей концы векторов с линией AB (рис. 12.7). При поступательном движении тела (рис. 12.7в) МЦС отсутствует.

Примеры решения задач

Пример 1. Рассмотрим механизм, в котором стержень OA вращается вокруг точки O со скоростью ω. Вдоль стержня перемещается ползун M со скоростью v_M (рис. 12.8). Определить абсолютную скорость точки M.

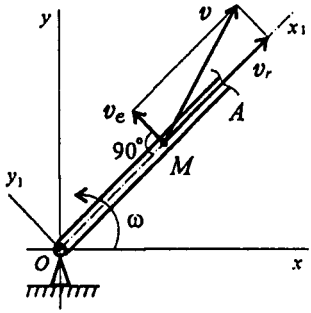


Рис. 12.8

Решение

1. Относительное движение — вдоль стержня; скорость $v_r = v_M$.

2. Переносное движение — вращение стержня; скорость

$v_e = \omega OM$.

3. Скорость абсолютного движения $v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2}$.

Пример 2. Стержень AB соскальзывает вниз, опираясь концами о стену и пол (рис. 12.9).

Длина стержня 1,5 м; в момент, изображенный на чертеже, скорость точки B $v_B = 3$ м/с. Найти скорость точки A.

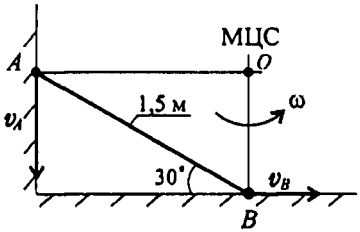


Рис. 12.9

Решение

1. Найдем положение МЦС. Скорости точек A и B направлены вдоль стены и вдоль пола. Восстанавливая перпендикуляры к векторам скоростей, находим МЦС.

2. По известной скорости v_B определяем угловую скорость ω стержня:

$$\omega = \frac{v_B}{OB}; \quad OB = AB\sin 30^\circ = 0{,}75\,\text{м}; \quad \omega = \frac{3}{0{,}75} = 4\,\text{рад/с}.$$

3. Скорость точки A:

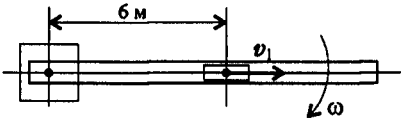
$$v_A = \omega OA; \quad OA = AB\cos 30^\circ \approx 1{,}3\,\text{м};$$

$$v_A = 4 \cdot 1{,}3 \approx 5{,}2\,\text{м/с}.$$

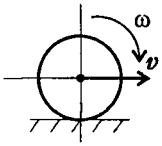
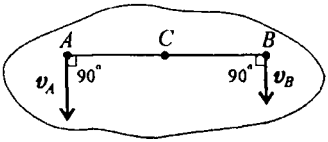
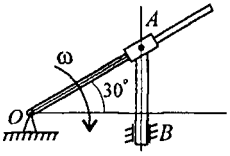
Контрольные вопросы и задания

1. Какое движение называют сложным?
2. Какие движения твердого тела называют простыми?
3. Какие системы координат выбирают при определении скоростей твердых тел при сложном движении?
4. Какое движение считают переносным, а какое — относительным?
5. Сформулируйте теорему сложения скоростей.
6. Какое движение называют плоским?
7. Какие способы применяют для определения скоростей точек тела при плоскопараллельном движении?
8. Что такое мгновенный центр скоростей, как его определяют и для чего используют?
9. Ответьте на вопросы тестового задания.

Темы 1.10, 1.11. Кинематика. Сложное движение точки. Сложное движение твердого тела

Вопросы	Ответы	Код
1. Пассажир поезда, движущегося со скоростью 72 км/ч, видит встречный поезд длиной 420 м в течение 12 с. Определить скорость встречного поезда.	15 км/ч	1
	20,5 км/ч	2
	35 км/ч	3
	54 км/ч	4
2. Тележка движется по стреле башенного крана со скоростью 2 м/с. При этом стрела крана поворачивается со скоростью 0,25 рад/с. Определить скорость тележки по отношению к Земле. 	1,2 м/с	1
	2 м/с	2
	2,5 м/с	3
	4,25 м/с	4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
3. Колесо без скольжения катится по земле. Скорость вращения колеса 30,8 рад/с. Радиус колеса 650 мм. Определить скорость перемещения центра колеса относительно Земли. 	5 м/с	1
	10 м/с	2
	15 м/с	3
	20 м/с	4
4. Точки A, B и C принадлежат движущемуся плоскопараллельно телу. Определить скорость точки C, если известны скорости точек A и B. $v_A = 75$ м/с; $v_B = 50$ м/с; $AC = BC$. 	45 м/с	1
	50 м/с	2
	62,5 м/с	3
	75 м/с	4
5. Кривошип OA вращается вокруг оси O со скоростью 10 рад/с. Ползун A перемещается вдоль кривошипа и перемещает стержень AB. Определить скорость точки B, если $OA = 0,2$ м. 	2 м/с	1
	2,3 м/с	2
	1 м/с	3
	8,6 м/с	4

ЛЕКЦИЯ 13

Тема 1.12. Основные понятия и аксиомы динамики. Понятие о трении

Иметь представление о массе тела и ускорении свободного падения, о связи между силовыми и кинематическими параметрами движения, о двух основных задачах динамики.

Знать аксиомы динамики и математическое выражение основного закона динамики.

Знать зависимости для определения силы трения.

Содержание и задачи динамики

Динамика — раздел теоретической механики, в котором устанавливается связь между движением тел и действующими на них силами.

В динамике решают два типа задач:

— определяют параметры движения по заданным силам;

— определяют силы, действующие на тело, по заданным кинематическим параметрам движения.

При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, поэтому тело можно принять за материальную точку.

Если размеры тела малы по сравнению с траекторией, его тоже можно рассматривать как материальную точку, при этом точка совпадает с центром тяжести тела.

При вращательном движении тела точки могут двигаться неодинаково, в этом случае некоторые положения динамики можно применять только к отдельным точкам, а материальный объект рассматривать как совокупность материальных точек.

Поэтому динамику делят на динамику точки и динамику материальной системы.

Аксиомы динамики

Законы динамики обобщают результаты многочисленных опытов и наблюдений. Законы динамики, которые принято рассматривать как аксиомы, были сформулированы Ньютоном, но первый и четвертый законы были известны Галилею. Механику, основанную на этих законах, называют классической механикой.

Первая аксиома (принцип инерции)

Всякая изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пок приложенные силы не выведут ее из этого состояния.

Это состояние называют состоянием инерции. Вывести точк из этого состояния, т. е. сообщить ей некоторое ускорение, может внешняя сила.

Всякое тело (точка) обладает *инертностью*. Мерой инертность является масса тела.

Массой называют *количество вещества в объеме тела*, в классической механике ее считают величиной постоянной. Единица измерения массы — килограмм (кг).

Вторая аксиома (второй закон Ньютона — основной закон динамики)

Зависимость между силой, действующей на материальную точку, и сообщаемым ею ускорением следующая:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a},$$

где m — масса точки, кг; $\boldsymbol{a}$ — ускорение точки, м/с^2.

Ускорение, сообщенное материальной точке силой, пропорционально величине силы и совпадает с направлением силы.

Основной закон динамики в дифференциальной форме:

$$F = m\frac{d^2S}{dt^2}, \quad \text{т. к.} \quad a = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

На все тела на Земле действует сила тяжести, она сообщает телу ускорение свободного падения, направленное к центру Земли:

$$\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g},$$

где $g = 9{,}81$ м/с^2, ускорение свободного падения.

Третья аксиома (третий закон Ньютона)

Силы взаимодействия двух тел равны по величине и направлены по одной прямой в разные стороны (рис. 13.1):

$$F_1 = F_2; \quad \boldsymbol{F}_1 = m_1\boldsymbol{a}_1; \quad \boldsymbol{F}_2 = m_2\boldsymbol{a}_2.$$

Откуда

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \quad \text{или} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

При взаимодействии ускорения обратно пропорциональны массам.

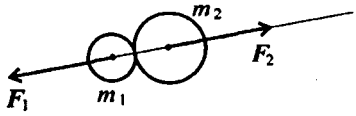


Рис. 13.1

Четвертая аксиома (закон независимости действия сил)

Каждая сила системы сил действует так, как она действовала бы одна.

Ускорение, сообщаемое точке системой сил, равно геометрической сумме ускорений, сообщенных точке каждой силой в отдельности (рис. 13.2):

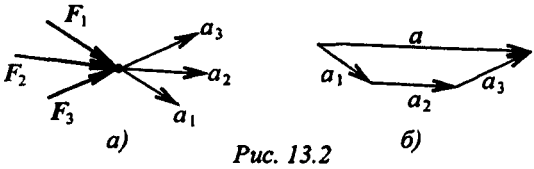


Рис. 13.2

$$F_\Sigma = ma; \quad a = \sum_0^n a_k.$$

Понятие о трении. Виды трения

Трение — сопротивление, возникающее при движении одного шероховатого тела по поверхности другого. При скольжении тел возникает трение скольжения, при качении — трение качения. Природа сопротивлений движению в разных случаях различна.

Трение скольжения

Причина — механическое зацепление выступов. Сила сопротивления движению при скольжении называется *силой трения скольжения* (рис. 13.3а).

Законы трения скольжения:

1. Сила трения скольжения прямо пропорциональна силе нормального давления:

$$F_{\text{тр}} = F_f = fR,$$

где R — сила нормального давления, направлена перпендикулярно опорной поверхности;

f — коэффициент трения скольжения.

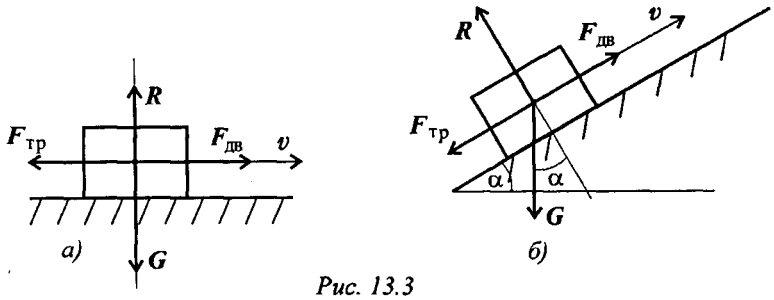


Рис. 13.3

В случае движения тела по наклонной плоскости (рис. 13.3б)

$$R = G\cos\alpha,$$

где α — угол наклона плоскости к горизонту.

Сила трения всегда направлена в сторону, обратную направлению движения.

2. Сила трения меняется от нуля до некоторого максимального значения, называемого силой трения покоя (статическое трение):

$$0 < F_f \leqslant F_{f_0},$$

F_{f_0} — *статическая* сила трения (сила трения покоя).

3. Сила трения при движении меньше силы трения покоя. Сил трения при движении называется *динамической* силой трения (F_f)

$$F_f \leqslant F_{f_0}.$$

Поскольку сила нормального давления, зависящая от веса и направления опорной поверхности, не меняется, то различают статический и динамический коэффициенты трения:

$$F_f = fR; \qquad F_{f_0} = f_0 R.$$

Коэффициент трения скольжения зависит от следующих факторов:

— от материала: материалы делятся на *фрикционные* (с большим коэффициентом трения) и *антифрикционные* (с малым коэффициентом трения), например $f = 0{,}1 \div 0{,}15$ (при скольжении стали по стали всухую), $f = 0{,}2 \div 0{,}3$ (при скольжении стали по текстолиту)

— от наличия смазки, например $f = 0{,}04 \div 0{,}05$ (при скольжении стали по стали со смазкой);

— от скорости взаимного перемещения.

Трение качения

Сопротивление при качении связано с взаимной деформацией грунта и колеса и значительно меньше трения скольжения.

Обычно считают грунт мягче колеса, тогда в основном деформируется грунт, и в каждый момент колесо должно перекатываться через выступ грунта. Для равномерного качения колеса необходимо прикладывать силу $\boldsymbol{F}_{\text{дв}}$ (рис. 13.4).

Условие качения колеса состоит в том, что движущийся момент должен быть не меньше момента сопротивления:

$$F_{\text{дв}} r \geqslant Nk;$$

$$N = G; \quad F_{\text{дв}} \geqslant k\frac{G}{r},$$

где k — максимальное значение плеча (половина колеи) принимается за коэффициент трения качения, размерность — сантиметры.

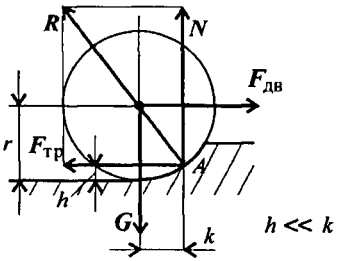


Рис. 13.4

Ориентировочные значения k (определяются экспериментально): сталь по стали — $k = 0{,}005$ см; резиновая шина по шоссе — $k = 0{,}24$ см.

Примеры решения задач

Пример 1. Свободная материальная точка, масса которой 5 кг, движется согласно уравнению $S = 0{,}48t^2 + 0{,}2t$. Определить величину движущей силы.

Решение

1. Ускорение точки: $a = v' = S''$; $v = S' = 0{,}96t + 0{,}2$; $a = v' = 0{,}96\ \text{м/с}^2$.

2. Действующая сила согласно основному закону динамики $F = ma$; $F = 5 \cdot 0{,}96 = 4{,}8$ Н.

Пример 2. К двум материальным точкам массой $m_1 = 2$ кг и

$m_2 = 5$ кг приложены одинаковые силы. Сравнить величины ускорений.

Решение

Согласно третьей аксиоме динамики ускорения обратно пропорциональны массам:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{5}{2} = 2{,}5; \quad a_1 = 2{,}5a_2.$$

Пример 3. На материальную точку действует система сил (рис. 13.5). Определить числовое значение ускорения, полученного материальной точкой $m = 7$ кг. Остальные данные представлены на чертеже.

Решение

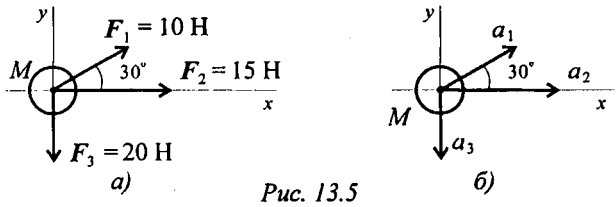


Рис. 13.5

1-й вариант.

1. Определяем суммарную силу, действующую на точку:

$$\sum_0^n F_{kx} = 15 + 10 \cdot \cos 30^\circ = 15 + 10 \cdot 0{,}866 = 23{,}66 \text{ Н};$$

$$\sum_0^n F_{ky} = 10 \cdot \cos 60^\circ - 20 = -15 \text{ Н};$$

$$F_\Sigma = \sqrt{23{,}66^2 + 15^2} = 28 \text{ Н}.$$

2. Определяем ускорение, сообщенное точке:

$$a_\Sigma = \frac{28}{7} = 4 \text{ м/с}^2.$$

2-й вариант.

Определяем ускорения от каждой из сил системы (рис. 13.5б):

$$a_1 = \frac{10}{7} = 1{,}43 \text{ м/с}^2; \quad a_2 = \frac{15}{7} = 2{,}14 \text{ м/с}^2; \quad a_3 = \frac{20}{7} = 2{,}86 \text{ м/с}^2.$$

2. Определяем суммарное ускорение:

$$\sum_0^n a_x = 1{,}43 \cdot 0{,}866 + 2{,}14 = 3{,}38 \text{ м/с}^2;$$

$$\sum_0^n a_y = 1{,}43 \cdot 0{,}5 + (-2{,}86) = -2{,}14 \text{ м/с}^2;$$

$$a_\Sigma = \sqrt{3{,}38^2 + 2{,}14^2} = 4 \text{ м/с}^2.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что называют массой тела? Назовите единицу измерения массы в системе СИ.

2. Что является мерой инертности тела?

3. Запишите основной закон динамики в векторной и дифференциальной форме.

4. На материальную точку действует постоянная сила. Как движется точка?

5. Какое ускорение получит точка, если на нее действует сила, равная удвоенной силе тяжести?

6. После столкновения двух материальных точек с массами $m_1 = 6$ кг и $m_2 = 24$ кг первая точка получила ускорение 1,6 м/с^2. Чему равно ускорение, полученное второй точкой?

7. В чем заключается принцип независимости действия сил?

8. Перечислите законы трения скольжения.

9. Перечислите факторы, влияющие на величину коэффициента трения скольжения.

10. Тело движется по наклонной плоскости вверх (рис. 13.6). Масса тела 10 кг, коэффициент трения 0,2. Определите возникающую силу трения.

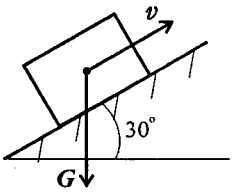


Рис. 13.6

ЛЕКЦИЯ 14

Тема 1.13. Движение материальной точки. Метод кинетостатики

Иметь представление о свободных и несвободных материальных точках, о силах инерции, об использовании силы инерции для решения технических задач.

Знать формулы для расчета силы инерции при поступательном и вращательном движениях, знать принцип Даламбера уметь определять параметры движения с использованием законов динамики и метода кинетостатики.

Свободная и несвободная точки

Материальная точка, движение которой в пространстве не ограничено какими-нибудь связями, называется *свободной*. Задачи решаются с помощью основного закона динамики.

Материальные точки, движение которых ограничено связями называются *несвободными*.

Для несвободных точек небоходимо определять реакции связей Эти точки движутся под действием активных сил и ограничивающих движение реакций связей (пассивных сил).

Несвободные материальные точки освобождаются от связей связи заменяются их реакциями. Далее несвободные точки можно рассматривать как свободные (принцип освобождаемости от связей)

Сила инерции

Инертность — способность сохранять свое состояние неизменным, это внутреннее свойство всех материальных тел.

Сила инерции — сила, возникающая при разгоне или торможении тела (материальной точки) и направленная в обратную сторону от ускорения. Силу инерции можно измерить, она приложена к «связям» — телам, связанным с разгоняющимся или тормозящимся телом.

Рассчитано, что сила инерции равна

$$F_{\text{ин}} = |ma|.$$

Таким образом, силы, действующие на материальные точки m_1 и m_2 (рис. 14.1), при разгоне платформы соответственно равны

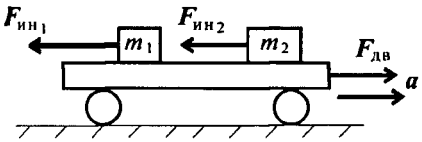


Рис. 14.1

$$F_{ин_1} = m_1 a;$$

$$F_{ин_2} = m_2 a.$$

Разгоняющееся тело (платформа с массой m (рис. 14.1)) силу инерции не воспринимает, иначе разгон платформы вообще был бы невозможен.

При вращательном движении (криволинейном) возникающее ускорение принято представлять в виде двух составляющих: нормального a_n и касательного a_t (рис. 14.2).

Поэтому при рассмотрении криволинейного движения могут возникнуть две составляющие силы инерции: нормальная и касательная

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$;

$a_t = \dfrac{dv}{dt} = v'$; $a_t = \varepsilon r$; $F^t_{ин} = m\varepsilon r$;

$a_n = \dfrac{v^2}{r}$; $F^n_{ин} = \dfrac{mv^2}{r}$.

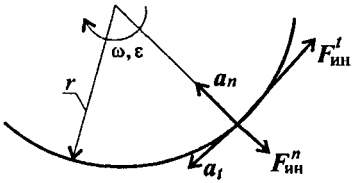


Рис. 14.2

При равномерном движении по дуге всегда возникает нормальное ускорение, касательное ускорение равно нулю, поэтому действует только нормальная составляющая силы инерции, направленная по радиусу из центра дуги (рис. 14.3).

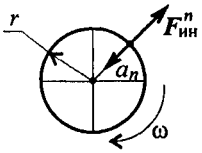


Рис. 14.3

$\omega = \text{const}$;

$$F^n_{ин} = ma_n = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r.$$

Принцип кинетостатики (принцип Даламбера)

Принцип кинетостатики используют для упрощения решения ряда технических задач.

Реально силы инерции приложены к телам, связанным с разгоняющимся телом (к связям).

Даламбер предложил *условно прикладывать* силу инерции к активно разгоняющемуся телу. Тогда система сил, приложенных к материальной точке, становится уравновешенной, и можно при решении задач динамики использовать уравнения статики.

Принцип Даламбера:

Материальная точка под действием активных сил, реакций связей и условно приложенной силы инерции находится в равновесии:

$$\sum_0^n \boldsymbol{F}_k + \sum_0^n \boldsymbol{R}_k + \boldsymbol{F}_{\text{ин}} = 0; \qquad \boldsymbol{F}_{\text{ин}} = -m\boldsymbol{a}.$$

Порядок решения задач с использованием принципа Даламбера

1. Составить расчетную схему.
2. Выбрать систему координат.
3. Выяснить направление и величину ускорения.
4. Условно приложить силу инерции.
5. Составить систему уравнений равновесия.
6. Определить неизвестные величины.

Примеры решений задач

Пример 1. Рассмотрим движение платформы по шероховатой поверхности с ускорением (рис. 14.4).

Решение

Активные силы: движущая сила, сила трения, сила тяжести. Реакция в опоре $\boldsymbol{R}$. Прикладываем силу инерции в обратную от ускорения сторону. По принципу Даламбера, система сил, действующих на платформу, становится уравновешенной, и можно составить уравнения равновесия. Наносим систему координат и составляем уравнения проекций сил.

$$\sum_0^n F_{kx} = 0 \Rightarrow F_{\text{дв}} - F_{\text{ин}} - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0 \Rightarrow R - G = 0;$$

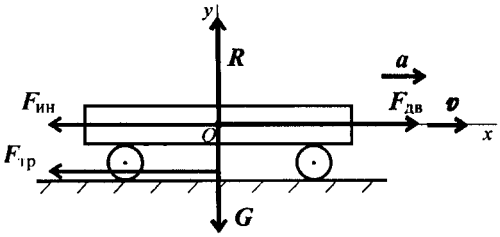


Рис. 14.4

$$|F_{ин}| = ma;$$

$$F_{тр} = fR,$$

где $F_{дв}$ — движущая сила;
$F_{тр}$ — сила трения;
G — сила тяжести;
R — реакция опоры;
$F_{ин}$ — сила инерции;
f — коэффициент трения.

Пример 2. Тело весом 3500 Н движется вверх по наклонной плоскости согласно уравнению $S = 0{,}16t^2$ (рис. 14.5). Определить величину движущей силы, если коэффициент трения тела о плоскость $f = 0{,}15$.

Решение

1. Составим расчетную схему, выберем систему координат с осью Ox вдоль наклонной плоскости.

Активные силы: движущая, сила трения, сила тяжести. Наносим реакцию в опоре перпендикулярно плоскости. Чтобы верно направить силу инерции, необходимо знать направление ускорения, определить это можно по уравнению движения.

При $a > 0$ движение равноускоренное.

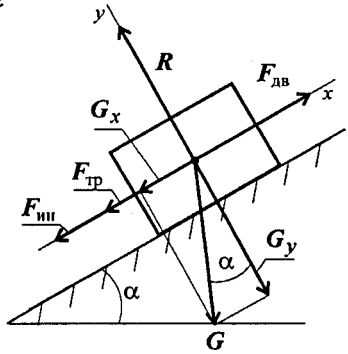


Рис. 14.5

2. Определяем ускорение движения:
$a = v' = S''$; $v = S' = 0{,}32t$; $a = v' = 0{,}32$ м/с$^2 > 0$.
Силу $F_{ин}$ направим в обратную от ускорения сторону.
3. По принципу Даламбера составим уравнения равновесия:

$$\sum_0^n F_{kx} = 0; \quad F_{дв} - G_x - F_{тр} - F_{ин} = 0; \quad G_x = G\sin 30°.$$

$$\sum_0^n F_{ky} = 0; \quad R - G_y = 0; \quad G_y = G\cos 30°; \quad R = G_y.$$

4. Подставим все известные величины в уравнения равновесия

$$F_{\text{тр}} = fR; \quad F_{\text{тр}} = fG_y = fG\cos 30^\circ;$$

$$F_{\text{ин}} = ma = \frac{G}{g}a;$$

$$F_{\text{дв}} - G\sin 30^\circ - fG\cos 30^\circ - \frac{G}{g}a = 0.$$

Выразим неизвестную силу и решим уравнение:

$$F_{\text{дв}} = 3500 \cdot 0{,}5 + 0{,}15 \cdot 3500 \cdot 0{,}866 + \frac{3500}{9{,}81} \cdot 0{,}32 = 2318{,}8 \text{ Н}.$$

Пример 3. График изменения скорости лифта при подъеме известен (рис. 14.6). Масса лифта с грузом 2800 кг. Определить натяжение каната, на котором подвешен лифт на всех участках подъема

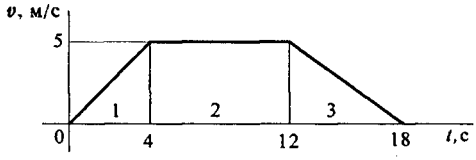


Рис. 14.6

Решение

1. Рассмотрим участок 1 — подъем с ускорением.

Составим схему сил (рис. 14.7).

Уравнение равновесия кабины лифта:

$$\sum_0^n F_{ky} = 0; \quad T_1 - G - F_{\text{ин}_1} = 0; \; T_1 = G + F_{\text{ин}_1} = mg + ma_1,$$

где T — натяжение каната; G — сила тяжести; $F_{\text{ин}}$ — сила инерции растягивающая канат.

Для определения ускорения на участке 1 учтем, что движение на этом участке равнопеременное, скорость $v = v_0 + at$; $v_0 = 0$. Следовательно, ускорение:

$$a_1 = \frac{v_1}{t_1} = \frac{5}{4}; \quad a_1 = 1{,}25 \text{ м/с}^2.$$

Определяем усилие натяжения каната при подъеме с ускорением

$$2800(9{,}81 + 1{,}25) = 30\,968\,\text{Н}; \quad T_1 = 30{,}97\,\text{кН}.$$

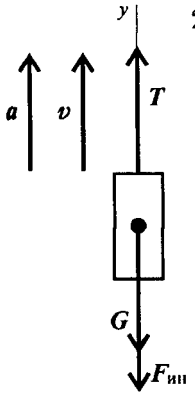


Рис. 14.7

2. Рассмотрим участок 2 — равномерный подъем.

Ускорение и сила инерции равны нулю. Натяжение каната равно силе тяжести.

$$T_2 - G = 0; \quad T_2 = G = mg;$$

$$T_2 = 2800 \cdot 9{,}81 \approx 28\ \text{кН}.$$

3. Участок 3 — подъем с замедлением.

Ускорение направлено в сторону, обратную направлению подъема. Составим схему сил (рис. 14.8).

Уравнение равновесия: $F_{ин3} + T_3 - G = 0$.

Отсюда $T_3 = G - F_{ин3} = mg - ma_3$.

Ускорение (замедление) на этом участке определяется с учетом того, что $v = 0$.

$$v_0 + a_3 t_3 = 0; \quad a_3 = -\frac{v_0}{t_3}; \quad a_3 = -\frac{5}{6}\ \text{м/с}^2.$$

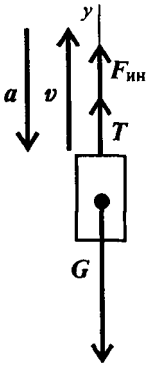


Рис. 14.8

Натяжение каната при замедлении до остановки:

$$T_3 = 2\,800\left(9{,}81 - \frac{5}{6}\right) = 25\,144\ \text{Н}; \quad T_3 = 25{,}14\ \text{кН}.$$

Таким образом, натяжение каната меняется при каждом подъеме и опускании, канат выходит из строя в результате усталости материала. Работоспособность зависит от времени.

Пример 4. Самолет выполняет «мертвую петлю» при скорости 160 м/с^2, радиус петли 1000 м, масса летчика 75 кг. Определить величину давления тела на кресло в верхней точке «мертвой петли».

Решение

1. Схема сил, действующих на летчика (рис. 14.9):

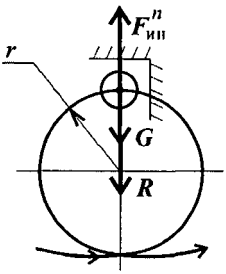


Рис. 14.9

где $\boldsymbol{G}$ — сила тяжести, $\boldsymbol{R}$ — реакция в опоре, $\boldsymbol{F}^n_{ин}$ — сила инерции.

Сила давления летчика на кресло равна силе давления опоры на летчика.

2. Уравнение равновесия (движение равномерное по дуге, действует только нормальное ускорение): $F^n_{ин} - G - R = 0$

$$R = F^n_{ин} - G; \quad R = m\frac{v^2}{r} - mg = m\left(\frac{v^2}{r} -\right.$$

$$R = 75\left(\frac{160^2}{1000} - 9{,}81\right) \approx 1184 \text{ Н}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните разницу между понятиями «инертность» и «сила инерции».

2. К каким телам приложена сила инерции, как направлена и по какой формуле может быть рассчитана?

3. В чем заключается принцип кинетостатики?

4. Задано уравнение движения материальной точки $S = 8{,}6t^2$. Определите ускорение точки в конце десятой секунды движения.

5. Тело движется вниз по наклонной плоскости (рис. 14.10). Нанесите силы, действующие на тело; используйте принцип Даламбера, запишите уравнение равновесия.

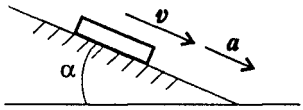


Рис. 14.10

6. Лифт спускается вниз с ускорением (рис. 14.11). Нанесите силы, действующие на кабину лифта, используя принцип кинетостатики, запишите уравнения равновесия.

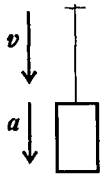


Рис. 14.11

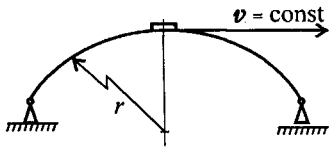


Рис. 14.12

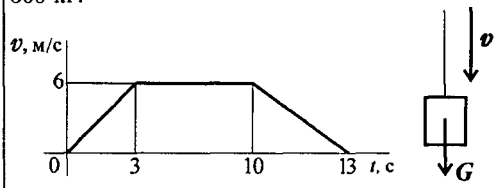
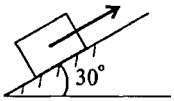
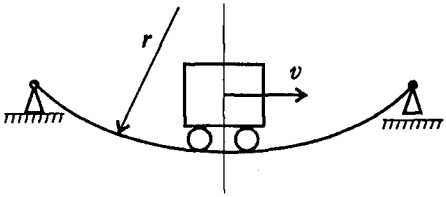
7. Автомобиль въезжает на арочный мост с постоянной скоростью v (рис. 14.12). Нанесите силы, действующие на автомобиль в середине моста, используя принцип кинетостатики, запишите уравнения равновесия.

8. Ответьте на вопросы тестового задания.

Темы 1.12, 1.13. Динамика. Движение материальной точки. Метод кинетостатики

Вопросы	Ответы	Код
1. Под действием постоянной силы материальная точка массой 5 кг приобрела скорость 12 м/с за 6 с. Определить силу, действующую на точку.	5 Н	1
	10 Н	2
	15 Н	3
	20 Н	4
2. К двум материальным точкам приложены одинаковые силы. Массы точек $m_1 = 30$ кг и $m_2 = 90$ кг. Сравнить величины полученных ускорений.	1 : 2	1
	1 : 3	2
	3 : 1	3
	4 : 1	4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
3. График изменения скорости лифта при опускании показан на рисунке. Определить натяжение каната, на котором подвешен лифт на первом участке движения. Масса нагруженного лифта 300 кг. 	600 Н	1
	2343 Н	2
	2943 Н	3
	3300 Н	4
4. Тело поднимается вверх согласно уравнению $S = 1,36\,t^2$. Коэффициент трения о поверхность настила $f = 0,15$. Определить величину движущей силы. Сила тяжести 784,8 Н. 	117,72 Н	1
	217,6 Н	2
	392,4 Н	3
	711,9 Н	4
5. Мотоциклист въезжает на деревянный мост и прогибает его. Радиус кривизны моста 100 м. Сила тяжести мотоцикла с мотоциклистом 1500 Н. Скорость мотоцикла 72 км/ч. Определить силу прижатия мотоцикла к поверхности моста. 	611,6 Н	1
	888,4 Н	2
	1500 Н	3
	2111,6 Н	4

ЛЕКЦИЯ 15

Тема 1.14. Работа и мощность

Иметь представление о работе силы при прямолинейном и криволинейном перемещениях, о мощности полезной и затраченной, о коэффициенте полезного действия.

Знать зависимости для определения силы трения, формулы для расчета работы и мощности при поступательном и вращательном движениях.

Уметь рассчитывать работу и мощность с учетом потерь на трение и сил инерции.

Работа

Для характеристики действия силы на некотором перемещении точки ее приложения вводят понятие «работа силы».

Работа служит мерой действия силы, работа — скалярная величина.

Работа постоянной силы на прямолинейном пути

Работа силы в общем случае численно равна произведению модуля силы на длину пройденного пути и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения (рис. 15.1):

$$W = FS\cos\alpha.$$

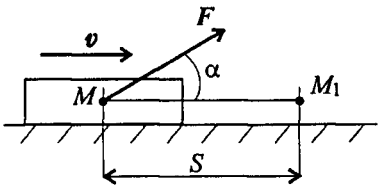


Рис. 15.1

Единицы измерения работы:
1 Дж (джоуль)= 1 Н·м; 1 кДж (килоджоуль) = 10^3 Дж.

Рассмотрим частные случаи.

1. Силы, совпадающие с направлением перемещения, называются *движущими силами*. Направление вектора силы совпадает с направлением перемещения (рис. 15.2).

В этом случае $\alpha = 0°$ ($\cos\alpha = 1$). Тогда $W = FS > 0$.

2. *Силы, перпендикулярные направлению перемещения, работы не производят* (рис. 15.3).

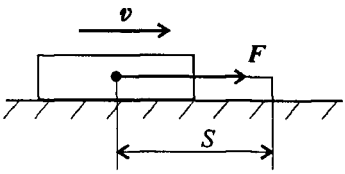


Рис. 15.2

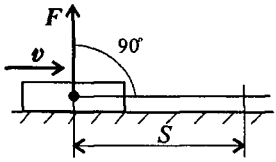


Рис. 15.3

Сила $\boldsymbol{F}$ перпендикулярна направлению перемещения. $\alpha = 90°$ ($\cos\alpha = 0$); $W = 0$.

3. Силы, направленные в обратную от направления перемещения сторону, называются *силами сопротивления* (рис. 15.4).

Рис. 15.4

Сила $\boldsymbol{F}$ направлена в обратную от перемещения $\boldsymbol{S}$ сторону.

В этом случае $\alpha = 180°$ ($\cos\alpha = -1$), следовательно, $W = -FS < 0$.

Движущие силы увеличивают модуль скорости, силы сопротивления уменьшают скорость.

Таким образом, работа может быть положительной и отрицательной в зависимости от направления силы и скорости.

Работа постоянной силы на криволинейном пути

Пусть точка M движется по дуге окружности и сила $\boldsymbol{F}$ составляет некоторый угол α с касательной к окружности (рис. 15.5).

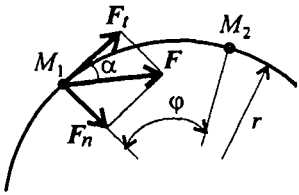


Рис. 15.5

Вектор силы можно разложить на две составляющие:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_t + \boldsymbol{F}_n.$$

Используя принцип независимости действия сил, определим работу каждой из составляющих силы отдельно:

$$W(\boldsymbol{F}_t) = F_t \Delta\check{S}; \qquad W(\boldsymbol{F}_n) = F_n \Delta\check{S},$$

где $\Delta\breve{S} = M_1\breve{M}_2$ — пройденный путь.

$$\Delta\breve{S} = \varphi r.$$

Нормальная составляющая силы $\boldsymbol{F}_n$ всегда направлена перпендикулярно перемещению и, следовательно, работы не производит: $W(\boldsymbol{F}_n) = 0$.

При перемещении по дуге обе составляющие силы разворачиваются вместе с точкой M. Таким образом, касательная составляющая силы всегда совпадает по направлению с перемещением.

Будем иметь: $W(\boldsymbol{F}_t) = F_t\varphi r$.

Касательную силу $\boldsymbol{F}_t$ обычно называют *окружной силой.*

Работа при криволинейном пути — это работа окружной силы:

$$W(\boldsymbol{F}) = W(\boldsymbol{F}_t).$$

Произведение окружной силы на радиус называют *вращающим моментом*:

$$M_{\text{вр}} = F_t r.$$

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению вращающего момента на угол поворота:

$$W(\boldsymbol{F}) = M_{\text{вр}}\varphi.$$

Работа силы тяжести

Работа силы тяжести зависит только от изменения высоты и равна произведению модуля силы тяжести на вертикальное перемещение точки (рис. 15.6):

$$W(\boldsymbol{G}) = G(h_1 - h_2) = G\Delta h,$$

где Δh — изменение высоты.

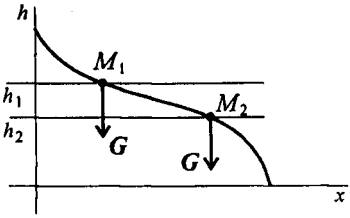


Рис. 15.6

При опускании работа положительна, при подъеме отрицательна.

Работа равнодействующей силы

Под действием системы сил точка массой m перемещается из положения M_1 в положение M_2 (рис. 15.7).

В случае движения под действием системы сил пользуются теоремой о работе равнодействующей.

Работа равнодействующей на некотором перемещении равна

алгебраической сумме работ системы сил на том же перемещени

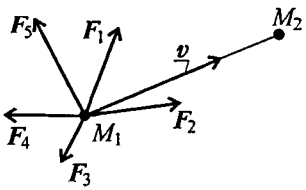


Рис. 15.7

$$\boldsymbol{F}_\Sigma = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \cdots + \boldsymbol{F}_n.$$

Работа равнодействующей силы

$$W(\boldsymbol{F}_\Sigma) = \sum_0^n W(\boldsymbol{F}_k).$$

Примеры решения задач

Пример 1. Тело массой 200 кг поднимают по наклонной плоскости (рис. 15.8).

Определите работу при перемещении на 10 м с постоянной скоростью. Коэффициент трения тела о плоскость $f = 0{,}15$.

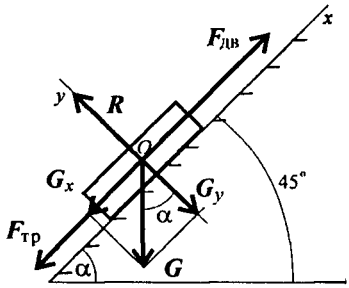


Рис. 15.8

Решение

1. При равномерном подъеме движущая сила равна сумме сил сопротивления движению. Наносим на схему силы, действующие на тело:

$$\boldsymbol{F}_{дв} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{F}_{тр} + \boldsymbol{G};$$

$$R = G_y = G\cos\alpha;\ \alpha = 45^\circ;\quad F_{тр} = fR = fG\cos\alpha;$$

$$\sum_0^n F_{kx} = 0;\quad F_{дв} = G_x + F_{тр}.$$

2. Используем теорему о работе равнодействующей:

$$W(\boldsymbol{F}_{дв}) = W(\boldsymbol{R}) + W(\boldsymbol{F}_{тр}) + W(\boldsymbol{G});\quad W(\boldsymbol{R}) = 0;\ W(\boldsymbol{G}) = W(\boldsymbol{G}_x).$$

3. Подставляем входящие величины и определяем работу по подъему:

$$W(\boldsymbol{F}_{дв}) = F_{тр}\Delta S + G_x\Delta S;\quad G = mg.$$

$$W(\boldsymbol{F}_{\text{дв}}) = fG\cos\alpha\Delta S + G\sin\alpha\Delta S; \quad \Delta S = 10\,\text{м}, \quad \alpha = 45°;$$

$$W(\boldsymbol{F}_{\text{дв}}) = mg\Delta S(f\cos\alpha + \sin\alpha); \quad W(\boldsymbol{F}_{\text{дв}}) = 200{\cdot}9{,}81{\cdot}10(0{,}15{\cdot}0{,}7+0{,}7);$$

$$W(\boldsymbol{F}_{\text{дв}}) = 15\,794\ \text{Дж}.$$

Пример 2. Определите работу силы тяжести при перемещении груза из точки A в точку C по наклонной плоскости (рис. 15.9). Сила тяжести тела 1500 Н. $AB = 6$ м, $BC = 4$ м.

Решение

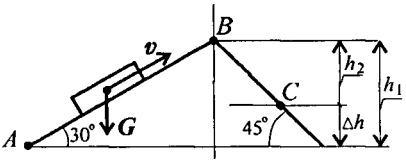


Рис. 15.9

1. Работа силы тяжести зависит только от изменения высоты груза. Изменение высоты при перемещении из точки A в C:

$$\Delta h = h_1 - h_2;$$

$$\Delta h = AB\sin 30° - BC\sin 45°;$$

$$\Delta h = 6 \cdot 0{,}5 - 4 \cdot 0{,}7 = 0{,}2\ \text{м}.$$

2. Работа силы тяжести:

$$W(\boldsymbol{G}) = G\Delta h = 1500 \cdot 0{,}2 = 300\ \text{Дж}.$$

Пример 3. Определите работу силы резания за 3 мин. Скорость вращения детали 120 об/мин, диаметр обрабатываемой детали 40 мм, сила резания 1 кН (рис. 15.10).

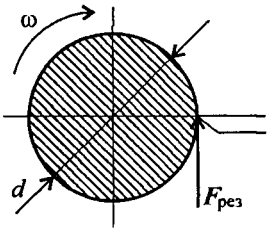


Рис. 15.10

Решение

1. Работа при вращательном движении

$$W = F_{\text{рез}}\frac{d}{2}\varphi,$$

где $F_{\text{рез}}$ — сила резания.

2. Угловая частота вращения 120 об/мин.

3. Число оборотов за заданное время составляет $z = 120 \cdot 3 = 360$ об.

Угол поворота за это время $\varphi = 2\pi z$. $\varphi = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 360 = 2261$ рад.

4. Работа за 3 мин $W_р = 1 \cdot 0{,}02 \cdot 2261 = 45{,}2$ кДж.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие силы называют движущими?
2. Какие силы называют силами сопротивления?
3. Запишите формулы для определения работы при поступательном и вращательном движениях.
4. Какую силу называют окружной? Что такое вращающий момент?
5. Сформулируйте теорему о работе равнодействующей.

ЛЕКЦИЯ 16

Тема 1.14. Работа и мощность. Коэффициент полезного действия

Иметь представление о мощности при прямолинейном и криволинейном перемещениях, о мощности полезной и затраченной, о коэффициенте полезного действия.

Знать зависимости для определения мощности при поступательном и вращательном движениях, КПД.

Уметь рассчитать мощность с учетом потерь на трение и сил инерции.

Мощность

Для характеристики работоспособности и быстроты совершения работы введено понятие мощности.

Мощность — работа, выполненная в единицу времени:

$$P = \frac{W}{t}.$$

Единицы измерения мощности: ватты, киловатты,

$1\,\frac{\text{Н·м}}{\text{с}} = 1\,\text{Вт}$; $10^3\,\text{Вт} = 1\,\text{кВт}$.

Мощность при поступательном движении (рис. 16.1)

$$P = \frac{FS\cos\alpha}{t}.$$

Учитывая, что $\frac{S}{t} = v_{\text{ср}}$, получим

$$P = Fv_{\text{ср}}\cos\alpha,$$

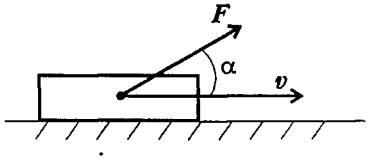


Рис. 16.1

где F — модуль силы, действующей на тело; $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость движения тела.

Средняя мощность при поступательном движении равна произведению модуля силы на среднюю скорость перемещения и на косинус угла между направлениями силы и скорости.

Мощность при вращении (рис. 16.2)

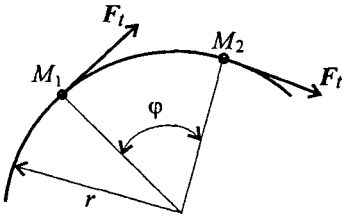


Рис. 16.2

Тело движется по дуге радиус r из точки M_1 в точку M_2.

$$\breve{M_1M_2} = \varphi r.$$

Работа силы: $W = M_{\text{вр}}\varphi$

$M_{\text{вр}} = F_t r$, где $M_{\text{вр}}$ — вращающи момент.

$$P = \frac{M_{\text{вр}}\varphi}{t}.$$

Учитывая, что $\dfrac{\varphi}{t} = \omega_{\text{ср}}$, получим $P = M_{\text{вр}}\omega_{\text{ср}}$, где $\omega_{\text{ср}}$ — средняя угловая скорость.

Мощность силы при вращении равна произведению вращающего момента на среднюю угловую скорость.

Если при выполнении работы усилие машины и скорость движения меняются, можно определить мощность в любой момент времени, зная значения усилия и скорости в данный момент.

Коэффициент полезного действия

Каждая машина и механизм, совершая работу, тратит часть энергии на преодоление вредных сопротивлений.

Таким образом, машина (механизм) кроме полезной работы совершает еще и дополнительную работу.

Отношение полезной работы к полной работе или полезной мощности ко всей затраченной мощности называется коэффициентом полезного действия (КПД):

$$\eta = \text{КПД} = \frac{P_{\text{пол}}}{P_{\text{затр}}}.$$

Полезная работа (мощность) расходуется на движение с заданной скоростью и определяется по формулам:

$$W = FS\cos\alpha, \quad P = Fv\cos\alpha;$$

$$W = M_{\text{вр}}\varphi, \quad P = M_{\text{вр}}\omega.$$

Затраченная мощность больше полезной на величину мощности, идущей на преодоление трения в звеньях машины, на утечки и тому подобные потери.

Чем выше КПД, тем совершеннее машина.

Примеры решения задач

Пример 1. Определить потребную мощность мотора лебедки для подъема груза весом 3 кН на высоту 10 м за 2,5 с (рис. 16.3). КПД механизма лебедки 0,75.

Решение

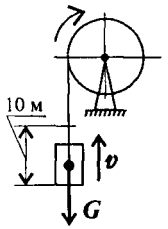


Рис. 16.3

1. Мощность мотора используется на подъем груза с заданной скоростью и преодоление вредных сопротивлений механизма лебедки.

Полезная мощность определяется по формуле $P = Fv\cos\alpha$. В данном случае $\alpha = 0$; груз движется поступательно.

2. Скорость подъема груза $v = \frac{S}{t}$; $v = \frac{10}{2{,}5} = 4$ м/с.

3. Необходимое усилие равно весу груза (равномерный подъем).

4. Полезная мощность $P = 3000 \cdot 4 = 12\,000$ Вт.

5. Полная мощность, затрачиваемая мотором,

$$P_{\text{мотора}} = \frac{P}{\eta}.\ P_{\text{мотора}} = \frac{12}{0{,}75} = 16\,\text{кВт}.$$

Пример 2. Судно движется со скоростью 56 км/ч (рис. 16.4). Двигатель развивает мощность 1200 кВт. Определить силу сопротивления воды движению судна. КПД машины 0,4.

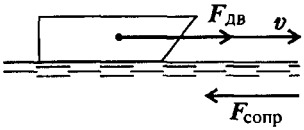


Рис. 16.4

Решение

1. Определяем полезную мощность, используемую на движение с заданной скоростью:

$$P = F_{\text{дв}} v \cos\alpha.$$

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{мотора}}}; \quad P = P_{\text{мотора}}\eta; \quad P = 1200 \cdot 0{,}4 = 480\,\text{кВт}.$$

2. По формуле для полезной мощности можно определить движущую силу судна с учетом условия $\alpha = 0$. При равномерном движении движущая сила равна силе сопротивления воды: $F_{\text{дв}} = F_{\text{сопр}}$.

3. Скорость движения судна $v = \dfrac{36 \cdot 1000}{3600} = 10$ м/с.

4. Сила сопротивления воды

$$F_{\text{сопр}} = \frac{P}{v}; \quad F_{\text{сопр}} = \frac{480\,000}{10} = 48\,000\,\text{Н}.$$

Сила сопротивления воды движению судна $F_{\text{сопр}} = 48$ кН.

Пример 3. Точильный камень прижимается к обрабатываемой детали с силой 1,5 кН (рис. 16.5). Какая мощность затрачивается на обработку детали, если коэффициент трения материала камня о деталь 0,28; деталь вращается со скоростью 100 об/мин, диаметр детали 60 мм.

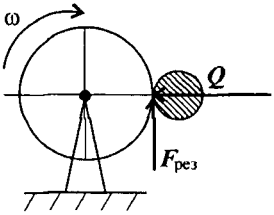


Рис. 16.5

Решение

1. Резание осуществляется за счет трения между точильным камнем и обрабатываемой деталью:

$$F_{\text{рез}} = F_{\text{тр}} = fQ; \quad F_{\text{тр}} = 0{,}28 \cdot 1{,}5 = 0{,}42\,\text{кН}.$$

2. Момент силы резания $M = F_{\text{тр}}\dfrac{d}{2}$; $M = 420 \cdot 0{,}03 = 12{,}6$ Н·м.

3. Угловая скорость вращения детали

$$\omega = \frac{3{,}14 \cdot 100}{30} = 10{,}47\,\text{рад/с}.$$

4. Мощность, необходимая для обработки детали:

$$P = M\omega; \quad P = 12{,}6 \cdot 10{,}47 = 132\ \text{Вт}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите формулы для расчета работы при поступательном и вращательном движениях.

2. Вагон массой 1000 кг перемещают по горизонтальному пути на 5 м, коэффициент трения 0,15. Определите работу силы тяжести.

3. Колодочным тормозом останавливают барабан после отключения двигателя (рис. 16.6). Определите работу торможения за 3 оборота, если сила прижатия колодок к барабану 1 кН, коэффициент трения 0,3.

4. Натяжение ветвей ременной передачи $S_1 = 700$ Н, $S_2 = 300$ Н (рис. 16.7). Определите вращающий момент передачи.

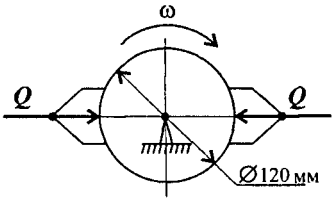


Рис. 16.6

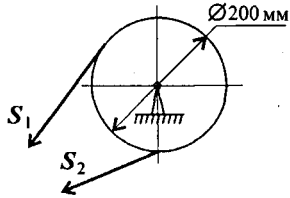


Рис. 16.7

5. Запишите формулы для расчета мощности при поступательном и вращательном движениях.

6. Определите мощность, необходимую для подъема груза весом 0,5 кН на высоту 10 м за 1 мин.

7. Определите общий КПД механизма, если при мощности двигателя 12,5 кВт и общей силе сопротивления движению 2 кН скорость движения 5 м/с.

8. Ответьте на вопросы тестового задания.

Тема 1.14. Динамика. Работа и мощность

Вопросы	Ответы	Код
1. Вагон массой 680 кг катится равномерно по горизонтальному пути и проходит 15 м. Чему равна работа силы тяжести?	10 200 Дж	1
	100 062 Дж	2
	0	3
	125 000 Дж	4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
2. Мощность токарного станка 1,5 кВт. Обточка детали производится за 3 мин. КПД станка 0,8. Определить работу, совершаемую при обточке.	270 кДж	1
	216 кДж	2
	4500 Дж	3
	3600 Дж	4
3. Определить потребную мощность станка для обработки детали диаметром 300 мм при угловой частоте вращения 120 об/мин и силе резания 1 кН. КПД станка 0,85.	1,884 кВт	1
	2,216 кВт	2
	4,5 кВт	3
	18 кВт	4
4. Определить вращающий момент на валу электродвигателя при мощности 8 кВт и угловой скорости 100 рад/с. КПД двигателя 0,8.	80 Н·м	1
	64 Н·м	2
	46 Н·м	3
	Верный ответ не приведен	4
5. Определить потребную мощность мотора лебедки для подъема груза 3,6 кН на высоту 120 м за 1 мин.	2,59 кВт	1
	43,2 кВт	2
	7,2 кВт	3
	27,3 кВт	4

ЛЕКЦИЯ 17

Тема 1.15. Общие теоремы динамики

Иметь представление о понятиях «импульс силы», «количество движения», «кинетическая энергия»; о системе материальных точек, о внутренних и внешних силах системы.

Знать основные теоремы динамики, основные уравнения динамики при поступательном и вращательном движениях твердого тела, формулы для расчета моментов инерции некоторых однородных твердых тел.

Уметь определять параметры движения с помощью теорем динамики.

Теорема об изменении количества движения

Количеством движения материальной точки называется векторная величина, равная произведению массы точки на ее скорость $m\boldsymbol{v}$.

Вектор количества движения совпадает по направлению с вектором скорости. Единица измерения $[mv] = \text{кг}\cdot\text{м/с}$.

Произведение постоянного вектора силы на некоторый промежуток времени, в течение которого действует эта сила, называется *импульсом силы* $\boldsymbol{F}t$.

Вектор импульса силы по направлению совпадает с вектором силы. $[Ft] = \text{Н} \cdot \text{с} = \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}$.

Использовав основное уравнение динамики, после преобразования можно получить соотношение между количеством движения и импульсом силы (рис. 17.1).

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}; \quad \boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{v}'.$$

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \qquad \boldsymbol{F}\,dt = m d\boldsymbol{v}.$$

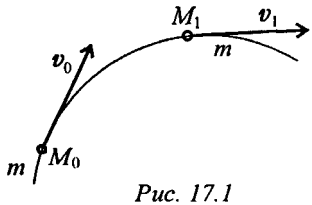


Рис. 17.1

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\int_0^t \boldsymbol{F}\,dt = \int_{v_0}^{v} m\,d\boldsymbol{v}; \quad \boldsymbol{F}t = m(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0).$$

Полученное соотношение выражает теорему об изменении количества движения точки:

Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно импульсу силы, действующему на точку в течение того же промежутка времени.

Теорема об изменении кинетической энергии

Энергией называется способность тела совершать механическую работу.

Существуют две формы механической энергии: потенциальная энергия, или энергия положения, и кинетическая энергия, или энергия движения.

Потенциальная энергия (П) определяет способность тела совершать работу при опускании с некоторой высоты до уровня моря. Потенциальная энергия численно равна работе силы тяжести.

$\text{П} = Gh$, где h — высота точки над уровнем моря.

Кинетическая энергия (К) определяется способностью движущегося тела совершать работу. Для материальной точки кинетическая энергия рассчитывается по формуле

$$\text{К} = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия — величина скалярная, положительная.

Единицы измерения: $[\text{П}] = [Gh] = \text{Н·м}$; $[\text{К}] = [\frac{mv^2}{2}] = \frac{\text{кг·м}^2}{c^2} = \text{Н·м}$.

Энергия имеет размерность работы.

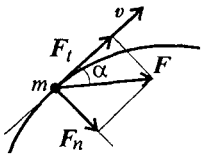


Рис. 17.2

Запишем для материальной точки (рис. 17.2) основное уравнение движения

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}.$$

Спроектируем обе части векторного равенства на направление скорости:

$$F\cos\alpha = ma\cos\alpha.$$

Известно, что $a\cos\alpha = a_t = \dfrac{dv}{dt}$.

Откуда $F\cos\alpha = m\dfrac{dv}{dt}$.

Умножив обе части полученного выражения на некоторое перещение dS, получим:

$$F\cos\alpha\, dS = m\frac{dv}{dt}\, dS; \quad m\frac{dv}{dt}\, dS = mv\, dv.$$

Интегрируем обе части равенства $\int\limits_0^t F\cos\alpha\, dS = m\int\limits_{v_0}^{v} v\, dv.$

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Полученное равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии точки:

Изменение кинетической энергии на некотором пути равно работе всех действующих на точку сил на том же пути.

Основы динамики системы материальных точек

Совокупность материальных точек, связанных между собой силами взаимодействия, называется механической системой.

Любое материальное тело в механике рассматривается как механическая система, образуемая совокупностью материальных точек.

Из определения механической системы следует, что движение каждой из точек, входящих в систему, *зависит* от движения остальных точек.

Силы, действующие на точки системы, делятся на *внешние* и *внутренние*. Силы взаимодействия *между точками этой системы* называют *внутренними*. К *внешним силам* относятся силы, действующие со стороны точек, *не входящих* в эту систему.

Примерами внешних сил являются сила тяжести, сила давления, сила трения и др.

К внутренним силам относятся силы упругости.

Движение механической системы зависит не только от внешних сил, но и от *суммарной массы системы* $m = \sum\limits_0^n \Delta m_k$, где Δm_k — масса отдельных точек механической системы.

Движение системы зависит и от положения центра масс системы — условной точки, в которой сосредоточена вся масса тела. Обычно считают, что в центре масс *приложены все внешние силы*.

Движение центра масс определяет движение всей системы только при поступательном движении, при котором все точки тела движутся одинаково.

Основное уравнение динамики при поступательном движении тела

Для определения движения тела (системы материальных точек) можно использовать второй закон динамики

$$\boldsymbol{F}_{\Sigma} = m\boldsymbol{a}_c,$$

где m — суммарная масса тела; $\boldsymbol{a}_c$— ускорение центра масс тела.

В поле земного притяжения *центр масс совпадает с центром тяжести.*

Основное уравнение динамики вращающегося тела

Пусть твердое тело под действием внешних сил вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью ω (рис. 17.3).

Рассматривая твердое тело как механическую систему, разобьем ее на множество материальных точек с массами Δm_k. Каждая точка движется по окружности радиуса r_k с касательным ускорением $a_k^t = \varepsilon r_k$ и нормальным ускорением $a_k^n = \omega^2 r_k$, где ε — угловое ускорение.

Используем для каждой точки принцип Даламбера и приложим силы инерции:

— касательную $\Delta F^t_{\text{ин}_k} = -\Delta m_k a_k^t$;

— нормальную $\Delta F^n_{\text{ин}_k} = -\Delta m_k a_k^n$.

Система сил, действующих на точку, по принципу Даламбера, находится в равновесии.

Поэтому алгебраическая сумма моментов относительно оси вращения должна быть равна нулю: $M_z - \sum\limits_0^n \Delta F^t_{\text{ин}_k} r_k = 0$, где M_z — момент внешних сил.

Моменты нормальных сил инерции $F^n_{\text{ин}_k}$ равны нулю, т. к. силы пересекают ось z. Силы, направленные по касательной к окружности, равны

$$\Delta F^t_{\text{ин}_k} = \Delta m_k a_k^t = \Delta m_k \varepsilon r_k,$$

где ε — общая величина, угловое ускорение тела.

Подставив значение силы в формулу для определения моментов, получим

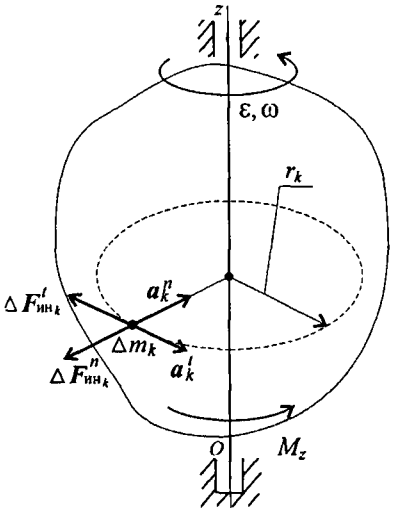


Рис. 17.3

$$M_z = \varepsilon \sum_0^n \Delta m_k r_k^2.$$

Величина $\sum\limits_0^n \Delta m_k r_k^2$ называется *моментом инерции тела относительно оси вращения* и обозначается $\mathcal{J}_z$.

$$\mathcal{J}_z = \sum_0^n \Delta m_k r_k^2.$$

В результате получим выражение основного уравнения динамики вращающего тела:

$$M_z = \mathcal{J}_z \varepsilon,$$

где M_z — сумма моментов внешних сил относительно оси; ε — угловое ускорение тела.

Момент инерции тела в этом выражении определяет *меру инертности* тела при вращении.

По выражению для момента инерции можно определить, что единица измерения этой величины в системе СИ $[\mathcal{J}_z] = [mr^2] = \text{кг}\cdot\text{м}^2$.

Видно, что значение момента инерции зависит от распределения массы относительно оси вращения: при одинаковой массе момент инерции больше, если основная часть массы расположена дальше от оси вращения. Для увеличения момента инерции используют колеса со спицами и отверстиями.

Моменты инерции некоторых тел

Момент инерции сплошного цилиндра (рис. 17.4) $\mathcal{J}_z = \dfrac{mr^2}{2}$.

Момент инерции полого тонкостенного цилиндра (рис. 17.5) $\mathcal{J}_z = mr^2$.

Момент инерции прямого тонкого стержня любого поперечного сечения

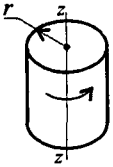


Рис. 17.4

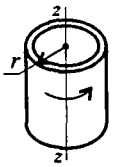


Рис. 17.5

$\mathcal{J}_z = \dfrac{ml^2}{3}$ (относительно zz, рис. 17.6а);

$\mathcal{J}_{z_1} = \dfrac{ml^2}{12}$ (относительно z_1z_1, рис. 17.6б).

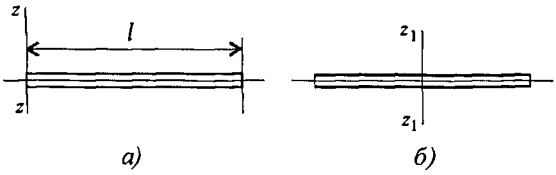


Рис. 17.6

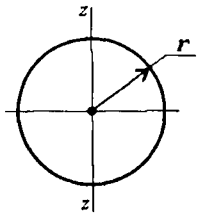


Рис. 17.7

Момент инерции шара (рис. 17.7) $\mathcal{J}_z = \dfrac{2}{5}mr^2$.

Примеры решения задач

Пример 1. Автомобиль двигался со скоростью 54 км/ч. В результате резкого торможения автомобиль остановился. Определите время торможения, если коэффициент трения между поверхностью дороги и колесами автомобиля 0,36.

Решение

Принимаем автомобиль за материальную точку (рис. 17.8).

1. Считаем, что торможение произошло только за счет трения. Используем теорему об изменении количества движения. Начальная скорость $v_0 = \dfrac{54 \cdot 1000}{3600} = 15$ м/с. По теореме изменения количества движения $mv - mv_0 = F_\text{т}t$. Конечная скорость $v = 0$ (остановка).

2. Тормозная сила $F_\text{т} = -fR$.

$$R = G = mg,$$

здесь R — сила прижатия; f — коэффициент трения; G — сила тяжести; m — масса автомобиля; g — ускорение свободного падения; $g = 9{,}81$ м/с^2.

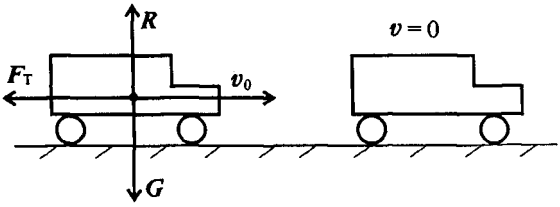


Рис. 17.8

3. После подстановок получаем формулу для определения времени торможения.

$$mv - mv_0 = -fmgt;$$

$$v_0 = fgt; \quad t = \frac{v_0}{fg};$$

$$t = \frac{15}{0{,}36 \cdot 9{,}81} \approx 4{,}25\,\text{с}.$$

Пример 2. После отключения двигателя колесо радиусом 0,5 м и массой 700 кг имело угловую частоту вращения 300 об/мин. Определите момент трения в подшипниках, если вал колеса остановился через 1,5 мин. Вращение принять равнопеременным, колесо считать сплошным цилиндром (рис. 17.9).

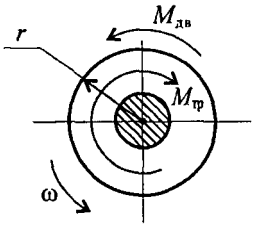


Рис. 17.9

Решение

1. Запишем уравнение динамики при вращении:

$$M_\Sigma = \mathcal{J}\varepsilon = M_{дв} - M_{тр},$$

где M_Σ — суммарный момент внешних сил; $\mathcal{J}$ — момент инерции; ε — угловое ускорение; $M_{дв}$ — движущий момент; $M_{тр}$ — момент трения (сил сопротивления).

2. Определим угловое ускорение по формуле для угловой скорости при равнопеременном движении:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \quad \omega_0 = \frac{\pi n}{30}; \quad \omega_0 = \frac{\pi \cdot 300}{30} = 31{,}4\,\text{рад/с}; \quad \omega = 0 \text{ (остановка)}.$$

Тогда

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t}; \quad \varepsilon = -\frac{31{,}4}{1{,}5 \cdot 60} = -0{,}35\,\text{рад/с}^2.$$

3. Определим момент инерции колеса, считая его сплошным цилиндром:

$$\mathcal{J} = \frac{mr^2}{2} = \frac{700 \cdot 0{,}5^2}{2} = 87{,}5\,\text{кг·м}^2.$$

4. Определяем величину тормозного момента — момента трения в подшипниках: $M_{\text{дв}} = 0$; $-M_{\text{тр}} = \mathcal{J}\varepsilon$;

$-M_{\text{тр}} = 87{,}5(-0{,}35)$; $M_{\text{тр}} = 30{,}625$ Н·м.

Пример 3. Шкив приводится во вращение ременной передачей (рис. 17.10). Натяжение ведущей ветви ремня $S_1 = 120$ Н, ведомого — $S_2 = 50$ Н. Масса шкива 200 кг, диаметр 80 мм, момент сопротивления в подшипниках 1,2 Н·м. Определить угловое ускорение вала пренебрегая его массой. Шкив считать тонкостенным цилиндром.

Решение

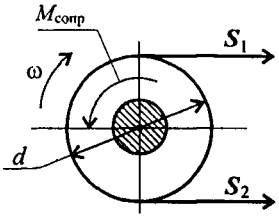


Рис. 17.10

1. Используем основное уравнение динамики $M_\Sigma = \mathcal{J}\varepsilon$.

2. Определяем суммарный момент внешних сил

$$M_\Sigma = S_1\frac{d}{2} - S_2\frac{d}{2} - M_{\text{сопр}};$$

$$M_\Sigma = 120 \cdot \frac{0{,}08}{2} - 50 \cdot \frac{0{,}08}{2} - 1{,}2 = 1{,}6\,\text{Н·м}.$$

3. Рассчитываем момент инерции шкива, влиянием вала пренебрегаем:

$$\mathcal{J} = mr^2; \quad \mathcal{J} = 200\left(\frac{0{,}08}{2}\right)^2 = 0{,}128\,\text{кг·м}^2.$$

4. Определяем угловое ускорение шкива

$$\varepsilon = \frac{M_\Sigma}{\mathcal{J}}; \quad \varepsilon = \frac{1{,}6}{0{,}128} = 12{,}5\,\text{рад/с}^2.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Тело массой 10 кг поднято на высоту 6 м. Определите потенциальную энергию тела и работу, которую совершит тело при падении с этой высоты.

2. Материальная точка массой 16 кг, движущаяся со скоростью 10 м/с, остановилась через 40 с. Определите величину тормозной силы.

3. Тело массой 9,2 кг двигалось из состояния покоя 3 с с ускорением 4 м/с^2 под действием силы $\boldsymbol{F}$. Определите запас кинетической энергии, накопленный телом.

4. Сплошной однородный цилиндр вращается вокруг продольной оси (рис. 17.11). От каких параметров зависит момент инерции цилиндра?

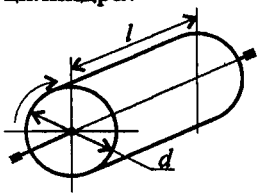


Рис. 17.11

Варианты ответов:

1. Только от m.
2. От m и d.
3. От l, m и d.
4. От l и m.

5. Определите вращающий момент на шкиве (рис. 17.12); $d = 60$ мм.

6. По результату решения предыдущей задачи (вопрос 5) определите момент инерции шкива, если, двигаясь из состояния покоя, он приобрел угловую скорость 50 рад/с за 10 с.

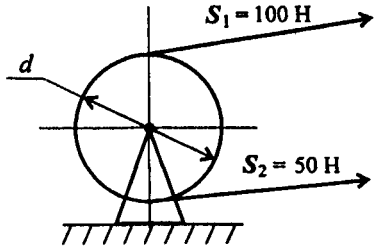


Рис. 17.12

Примечание. При ответах на контрольные вопросы ускорение свободного падения можно принимать равным 10 м/с^2.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО РАЗДЕЛУ «Теоретическая механика»

Практическое занятие 1

Тема 1.2. Плоская система сходящихся сил

Знать способы сложения двух сил и разложение силы на составляющие, геометрический и аналитический способы определение равнодействующей силы, условия равновесия плоской сходящейся системы сил.

Уметь определять равнодействующую системы сил, решать задачи на равновесие геометрическим и аналитическим способом рационально выбирая координатные оси.

Расчетные формулы

Равнодействующая системы сил

$$F_\Sigma = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}; \quad F_{\Sigma x} = \sum_0^n F_{kx}; \quad F_{\Sigma y} = \sum_0^n F_{ky},$$

где $F_{\Sigma x}$, $F_{\Sigma y}$ — проекции равнодействующей на оси координат; F_{kx}, F_{ky} — проекции векторов-сил системы на оси координат.

$$\cos\alpha_{\Sigma x} = \frac{F_{\Sigma x}}{F_\Sigma},$$

где $\alpha_{\Sigma x}$ — угол равнодействующей с осью Ox.

Условие равновесия

$$\begin{cases} \sum\limits_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum\limits_0^n F_{ky} = 0. \end{cases}$$

Если плоская система сходящихся сил находится в равновесии, многоугольник сил должен быть замкнут.

Пример 1. Определение равнодействующей системы сил

Определить равнодействующую плоской системы сходящихся сил аналитическим и геометрическим способами (рис. П1.1). Дано: $F_1 = 10$ кН; $F_2 = 15$ кН; $F_3 = 12$ кН; $F_4 = 8$ кН; $F_5 = 8$ кН;

$\alpha_1 = 30°$; $\alpha_2 = 60°$; $\alpha_3 = 120°$; $\alpha_4 = 180°$; $\alpha_5 = 300°$.

Решение

1. Определить равнодействующую аналитическим способом (рис. П1.1а).

$$\left\{\begin{array}{l} F_{1x} = 10\cdot\cos 30° = 8{,}66\,\text{кН}; \\ F_{2x} = 15\cdot\cos 60° = 7{,}5\,\text{кН}; \\ F_{3x} = -12\cdot\cos 60° = -6\,\text{кН}; \\ F_{4x} = -8\,\text{кН}; \\ F_{5x} = 8\cdot\cos 60° = 4\,\text{кН}; \end{array}\right\} \begin{array}{l} F_{\Sigma x} = \sum F_{kx}; \\ F_{\Sigma x} = 6{,}16\,\text{кН}. \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_{1y} = 10\cdot\cos 60° = 5\,\text{кН}; \\ F_{2y} = 15\cdot\cos 30° = 12{,}99\,\text{кН}; \\ F_{3y} = 12\cdot\cos 30° = 10{,}4\,\text{кН}; \\ F_{4y} = 0; \\ F_{5y} = -8\cdot\cos 30° = -6{,}9\,\text{кН}; \end{array}\right\} \begin{array}{l} F_{\Sigma y} = \sum F_{ky}; \\ F_{\Sigma y} = 21{,}49\,\text{кН}. \end{array}$$

$$F_\Sigma = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}; \quad F_\Sigma = \sqrt{6{,}16^2 + 21{,}49^2} = 22{,}36\,\text{кН};$$

$$\cos\alpha_{\Sigma x} = \frac{F_{\Sigma x}}{F_\Sigma}; \quad \cos\alpha_{\Sigma x} = \frac{6{,}16}{22{,}36} = 0{,}2755; \quad \alpha_{\Sigma x} = 74°.$$

2. Определить равнодействующую графическим способом.

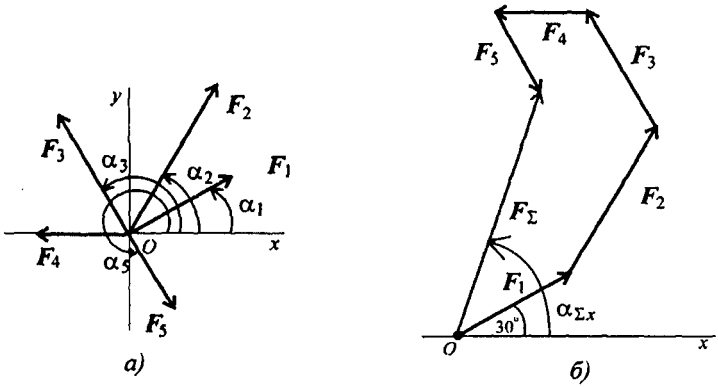


Рис. П1.1

С помощью транспортира в масштабе 2 мм = 1 кН строим многоугольник сил (рис. П1.1б). Измерением определяем модуль равнодействующей силы и угол наклона ее к оси Ox.

$$F_{\Sigma\text{гр}} \cong 22\,\text{кН}; \quad \alpha_{\Sigma x} = 73^\circ.$$

Результаты расчетов не должны отличаться более чем на 5 %

$$\frac{F_{\Sigma\text{ан}} - F_{\Sigma\text{гр}}}{F_{\Sigma\text{ан}}} \cdot 100\,\% \leqslant 5\,\%.$$

Расчетно-графическая работа 1

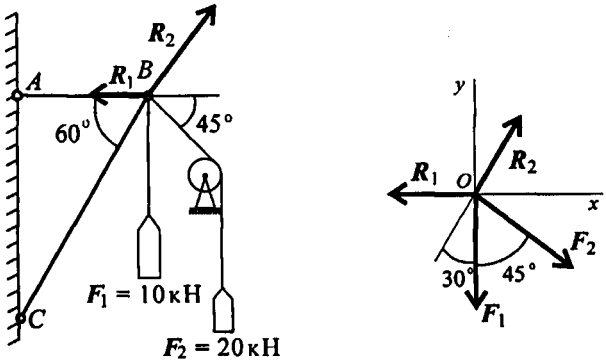
Определение равнодействующей плоской системы сходящихся сил аналитическим и геометрическим способами

Задание. Используя схему рис. П1.1а, определить равнодействующую системы сил.

Параметр	Вариант				
	1	2	3	4	5
F_1, кН	12	8	20	3	6
F_2, кН	8	12	5	6	12
F_3, кН	6	2	10	12	15
F_4, кН	4	10	15	15	3
F_5, кН	10	6	10	9	18
α_1, град	30	0	0	15	0
α_2, град	45	45	60	45	15
α_3, град	0	75	75	60	45
α_4, град	60	30	150	120	150
α_5, град	300	270	210	270	300

Пример 2. Решение задачи на равновесие аналитическим способом

Грузы подвешены на стержнях и канатах и находятся в равновесии. Определить реакции стержней AB и CB (рис. П1.2).



а) б)

Рис. П1.2

Решение

1. Определяем вероятные направления реакций (рис. П1.2а). Мысленно убираем стержень AB, при этом стержень CB опускается, следовательно, точка B отодвигается от стены: назначение стержня AB — тянуть точку B к стене.

Если убрать стержень CB, точка B опустится, следовательно, стержень CB поддерживает точку B снизу — реакция направлена вверх.

2. Освобождаем точку B от связи (рис. П1.2б).

3. Выберем направление осей координат, ось Ox совпадает с реакцией $\boldsymbol{R}_1$.

4. Запишем уравнения равновесия точки B:

$$\sum_0^n F_{kx} = -R_1 + R_2 \cos 60° + F_2 \cos 45° = 0;$$

$$\sum_0^n F_{ky} = R_2 \cos 30° - F_1 - F_2 \cos 45° = 0.$$

5. Из второго уравнения получаем:

$$R_2 = \frac{F_1 + F_2 \cos 45^\circ}{\cos 30^\circ}; \quad R_2 = \frac{10 + 20 \cdot 0,7}{0,866} = 27{,}87\,\text{кН}.$$

Из первого уравнения получаем:

$$R_1 = R_2 \cos 60^\circ + F_2 \cos 45^\circ; \quad R_1 = 28,07\,\text{кН}.$$

Вывод: стержень AB растянут силой 28,07 кН, стержень CB сжат силой 27,87 кН.

Примечание. Если при решении реакция связи окажется отрицательной, значит, вектор силы направлен в противоположную сторону.

В данном случае реакции направлены верно.

Расчетно-графическая работа 2

Условие равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме

Задание. Определить реакции стержней AC и AD (рис. П1.3).

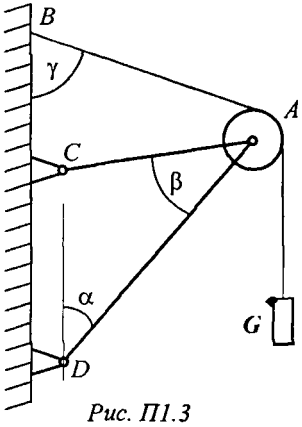
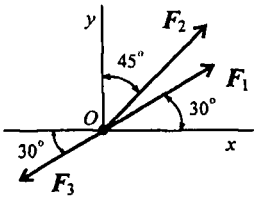
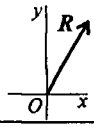
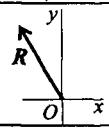
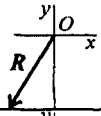
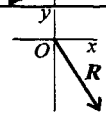


Рис. П1.3

Параметр	Вариант				
	1	2	3	4	5
G, кН	40	35	48	60	75
α, град	60	45	75	60	45
β, град	15	30	30	15	45
γ, град	60	45	60	75	75

При защите работ ответить на вопросы карт с тестовыми заданиями.

Темы 1.1, 1.2. Статика. Плоская сходящаяся система сил

Вопросы	Ответы	Код
1. Определить проекции равнодействующей на ось Ox при $F_1 = 10$ кН; $F_2 = 20$ кН; $F_3 = 30$ кН. 	$R_x = 4,99$ кН	1
	$R_x = 7,89$ кН	2
	$R_x = -3,18$ кН	3
	$R_x = 6,55$ кН	4
2. Определить величину равнодействующей силы по ее известным проекциям: $R_x = 15$ кН; $R_y = 8,66$ кН.	23,66 кН	1
	17,32 кН	2
	9,50 кН	3
	8,50 кН	4
3. Как направлен вектор равнодействующей системы сил, если известно, что $R_x = -4$ кН; $R_y = 12$ кН?		1
		2
		3
		4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
4. Груз находится в равновесии. Указать, какой из треугольников для шарнира B построен верно.		1
		2
		3
		4
5. Груз F находится в равновесии. Указать, какая система уравнений равновесия для точки B верна.	$\sum_0^n F_{kx} = R_3 - R_1 \cos 30° = 0$ $\sum_0^n F_{ky} = R_2 - R_1 \cos 60° = 0$	1
	$\sum_0^n F_{kx} = R_3 - R_1 \cos 60° = 0$ $\sum_0^n F_{ky} = R_2 - R_1 \cos 30° = 0$	2
	$\sum_0^n F_{kx} = R_3 - R_1 \cos 30° + R_2 \cos 90° = 0$ $\sum_0^n F_{ky} = -R_2 + R_1 \cos 60° = 0$	3
	Верный ответ не приведен	4

Практическое занятие 2
Тема 1.4. Плоская система произвольно расположенных сил

Знать теорему Пуансо о приведении силы к точке.

Уметь приводить произвольную плоскую систему сил к точке, определяя величины главного вектора и главного момента системы.

Знать три формы уравнений равновесия и уметь ими пользоваться при определении реакций в опорах балочных систем.

Основные формулы и предпосылки расчета

Виды опор балок и их реакции (рис. П2.1)

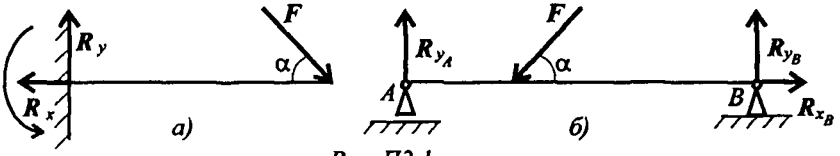


Рис. П2.1

Моменты пары сил и силы относительно точки (рис. П2.2)

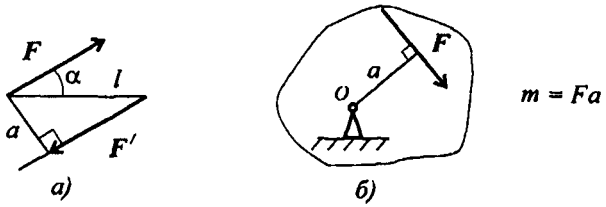


Рис. П2.2

Главный вектор

$$F_{гл} = \sqrt{\left(\sum_0^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_0^n F_{ky}\right)^2}.$$

Главный момент

$$M_{\text{гл}O} = \sum_{0}^{n} m_{kO}.$$

Условия равновесия

1. $\sum\limits_{0}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum\limits_{0}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum\limits_{0}^{n} m_{kA} = 0.$

Проверка: $\sum\limits_{0}^{n} m_{kB} = 0.$

2. $\sum\limits_{0}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum\limits_{0}^{n} m_{kA} = 0; \quad \sum\limits_{0}^{n} m_{kB} = 0.$

Проверка: $\sum\limits_{0}^{n} F_{ky} = 0.$

Упражнения при подготовке к самостоятельной работе

1. Перенести силу $\boldsymbol{F}$ в точку A, используя теорему Пуансо (рис. П2.3). $F = 20$ кН; $AB = 6$ м; $BC = 2$ м.

Рис. П2.3

2. Привести систему сил к точке B, определить главный вектор и главный момент системы сил (рис. П2.4). $AB = 2$ м; $BC = 1,5$ м; $CD = 1$ м. $F_1 = 18$ кН; $F_2 = 10$ кН; $F_3 = 30$ кН; $m = 36$ кН·м.

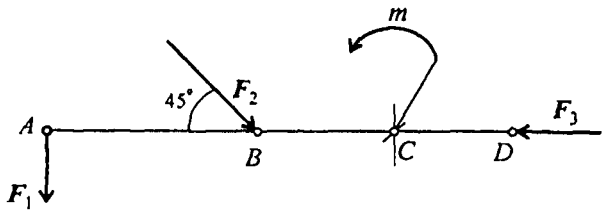


Рис. П2.4

3. Система сил находится в равновесии. Определить величину момента пары m (рис. П2.5). $F_1 = F_1' = 10$ кН; $F_2 = F_2' = 20$ кН.

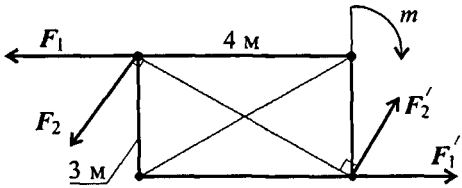


Рис. П2.5

4. Нанести реакции в опорах балок 1 и 2 (рис. П2.6).

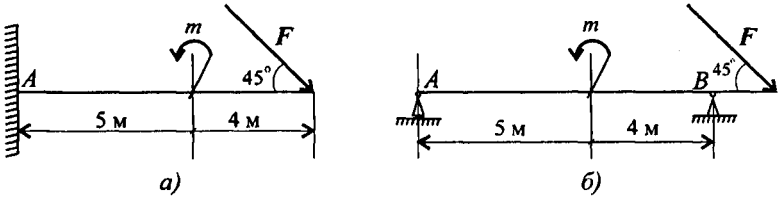


Рис. П2.6

5. Определить величину реакции в опоре A. Приложена распределенная нагрузка интенсивностью $q = 5$ кН/м (рис. П2.7).

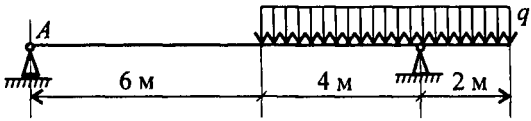


Рис. П2.7

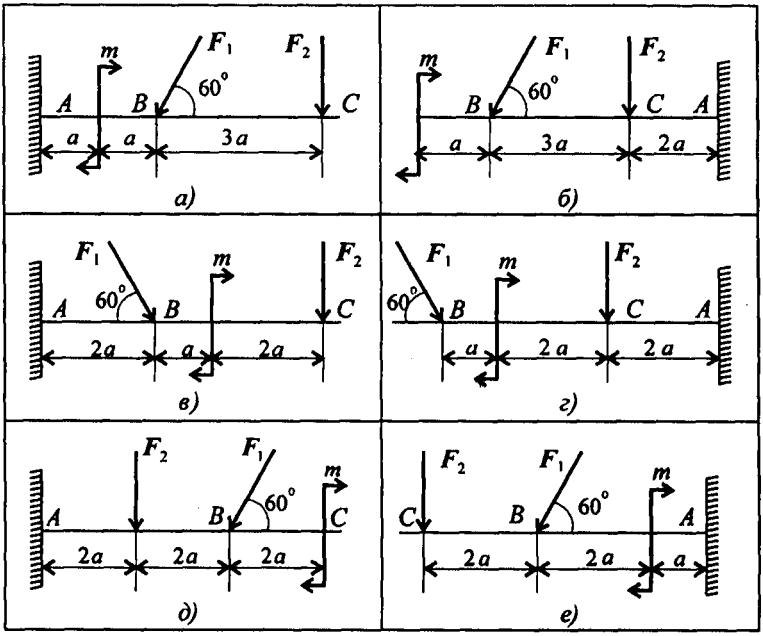
6. Записать систему уравнений равновесия для определения реакций в опоре защемленной балки.

7. Записать систему уравнений равновесия для определения реакций в опорах двухопорной балки, закрепленной на двух шарнирах.

Расчетно-графическая работа 1

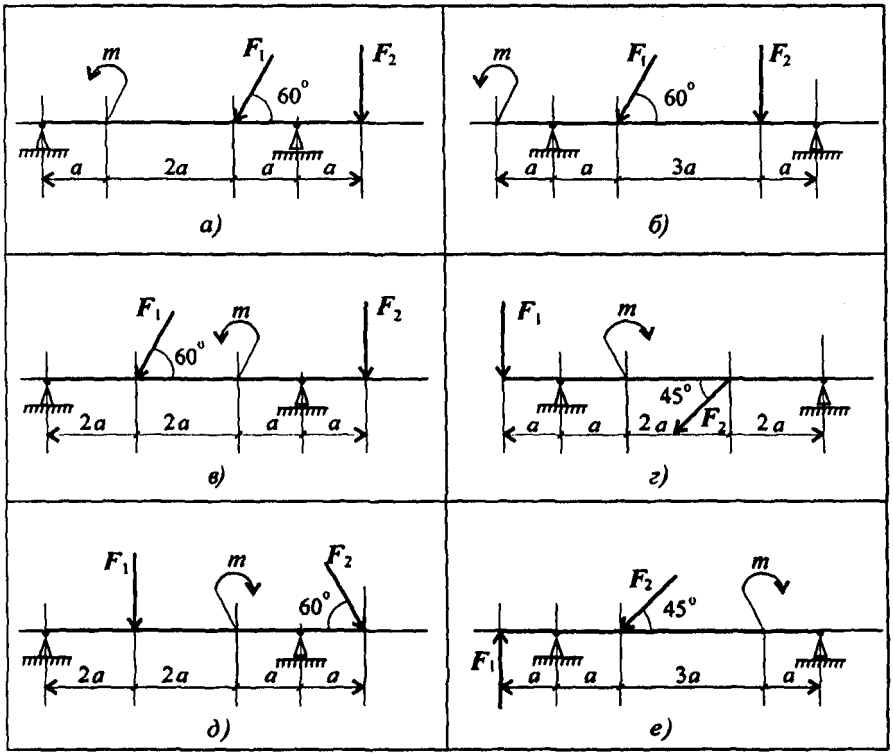
Определение реакций в опорах балочных систем под действием сосредоточенных сил и пар сил

Задание 1. Определить величины реакций в опоре защемленной балки. Провести проверку правильности решения.



Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1, кН	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
F_2, кН	4,4	4,8	7,8	8,4	12	12,8	17	18	22,8	24
m, кН·м	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
a, м	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,6

Задание 2. Определить величины реакций для балки с шарнирными опорами. Провести проверку правильности решения.

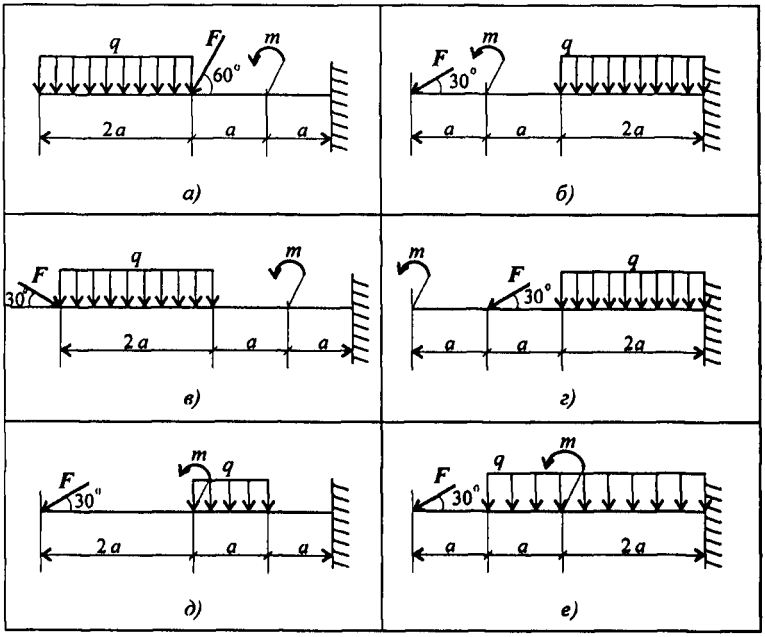


Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1, кН	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
F_2, кН	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5
m, кН·м	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
a, м	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Расчетно-графическая работа 2

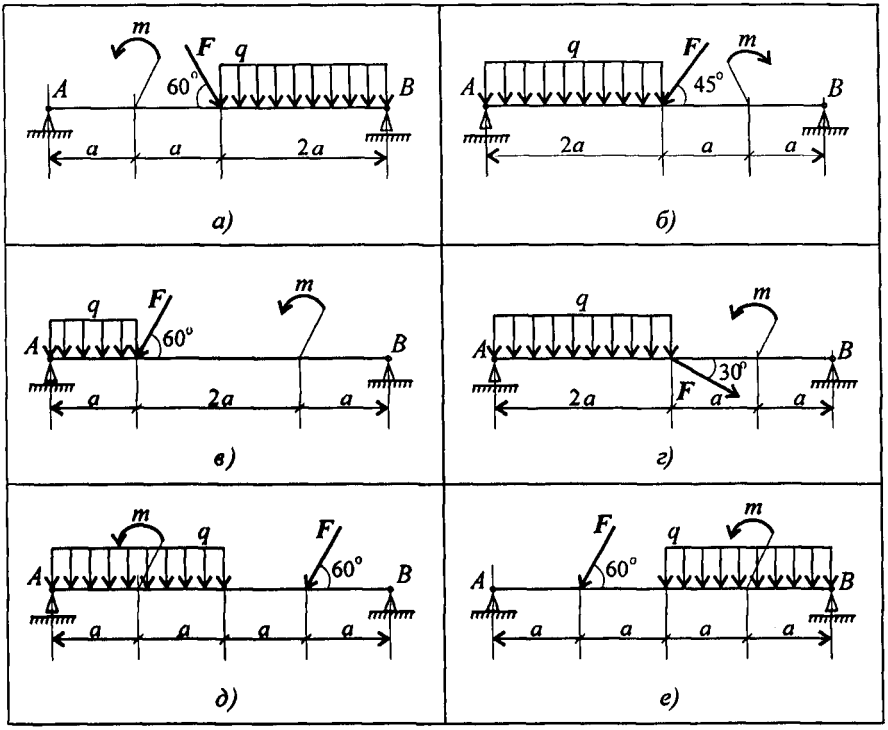
Определение величин реакций в опорах балочных систем под действием сосредоточенных и распределенных нагрузок

Задание 1. Определить величины реакций в заделке. Провести проверку правильности решения.



Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1, кН	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
q, кН/м	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
m, кН·м	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
a, м	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3

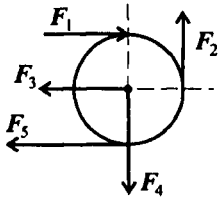
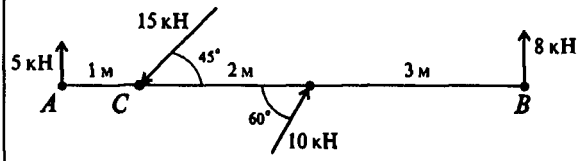
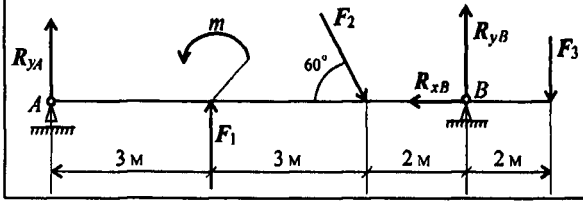
Задание 2. Определить величины реакций в шарнирных опорах балки. Провести проверку правильности решения.



Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F, кН	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
q, кН/м	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4
m, кН·м	15	25	35	45	55	45	35	25	15	5
a, м	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6

При защите работ ответить на вопросы карт с тестовыми заданиями.

Тема 1.4. Статика. Произвольная плоская система сил

Вопросы	Ответы	Код
1. Найти главный вектор системы сил, если: $F_1 = 2$ кН, $F_2 = 3$ кН, $F_3 = 5$ кН, $F_4 = F_5 = 8$ кН; диаметр колеса 0,8 м. 	5 кН	1
	11 кН	2
	12 кН	3
	16 кН	4
2. Найдите главный момент системы. Центр приведения находится в точке C. 	49,14 кН·м	1
	52,32 кН·м	2
	54,14 кН·м	3
	64,14 кН·м	4
3. Приводится уравнение равновесия для определения реакции в опоре A. Определите, какого члена уравнения не хватает: $R_{yA} \cdot 8 + F_1 \cdot 5 - m + F_3 \cdot 1 + \cdots = 0$. 	$F_2 \cos 60°$	1
	$F_2 \cos 30°$	2
	$-F_2 \sin 60°$	3
	$-F_2 \cdot 2 \sin 60°$	4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
4. Найти главный вектор системы сил.	2 кН	1
	4 кН	2
	6 кН	3
	8 кН	4
5. Определите алгебраическую сумму моментов относительно точки B.	7 кН·м	1
	25 кН·м	2
	42,3 кН·м	3
	68,3 кН·м	4

Практическое занятие 3
Тема 1.6. Центр тяжести

Знать методы определения центра тяжести тела и плоских сечений, формулы для определения положения ЦТ *плоских сечений*

Уметь определять положение центра тяжести сложных геометрических фигур, определять положение центра тяжести фигур, составленных из стандартных профилей.

Основные формулы и предпосылки расчета

Центры тяжести простейших сечений (рис. П3.1)

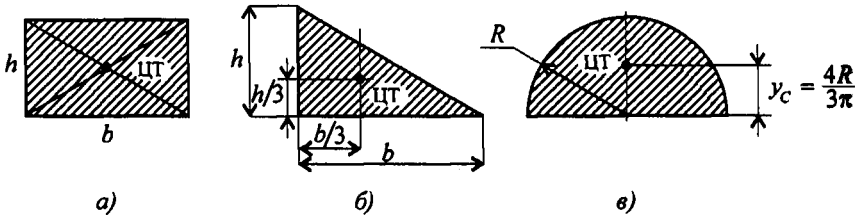


Рис. П3.1

Геометрические характеристики стандартных прокатных профилей в Приложении 2.

Методы расчета:

1) метод симметрии;

2) метод разделения на простые части;

3) метод отрицательных площадей.

Координаты центров тяжести сложных и составных сечений

$$x_C = \frac{\sum\limits_0^n A_k x_k}{A}; \quad y_C = \frac{\sum\limits_0^n A_k y_k}{A},$$

где A_k — площади частей сечения; x_k; y_k — координаты ЦТ частей сечения; A — суммарная площаль сечения, $A = \sum\limits_0^n A_k$.

Упражнения при подготовке к самостоятельной работе

1. Определить положение центра тяжести каждой из фигур, составляющих сечение (рис. П3.2). Размеры на чертеже указаны в мм.

2. Определить координату x_C изображенного сечения (рис. П3.3).

З а м е ч а н и е. Сечение расчленить на три части.

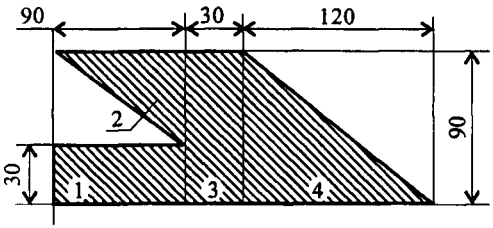


Рис. П3.2

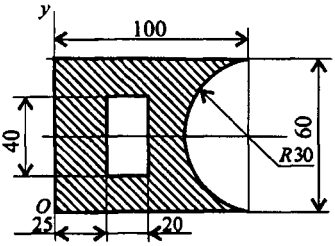


Рис. П3.3

3. Сколько координат центра тяжести нужно определять расчетным путем для каждого из изображенных сечений (рис. П3.4)?

4. По таблицам ГОСТ определить необходимые параметры сечений (рис. П3.5).

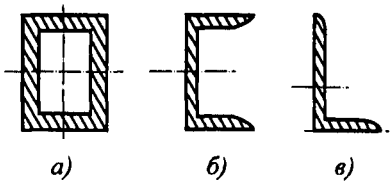


Рис. П3.4

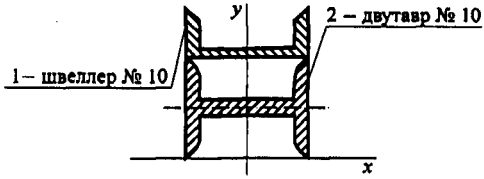


Рис. П3.5

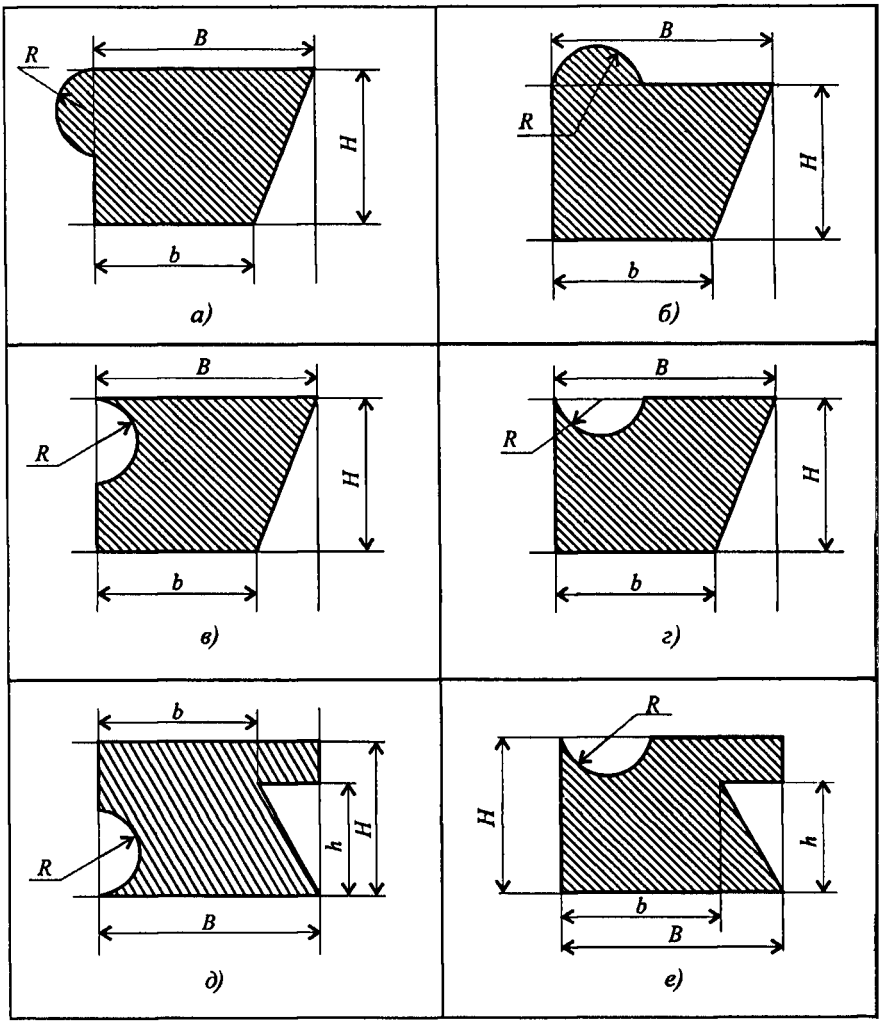
5. Определить координату y_C фигуры (рис. П3.5).

6. Какая характеристика сечения определяется по указанной формуле?

$$1.\ \sum A_k x_k. \quad 2.\ \frac{\sum V_k x_k}{\sum V_k}. \quad 3.\ \frac{\sum G_k x_k}{\sum G_k}. \quad 4.\ \frac{\sum G_k y_k}{\sum G_k}.$$

Расчетно-графическая работа

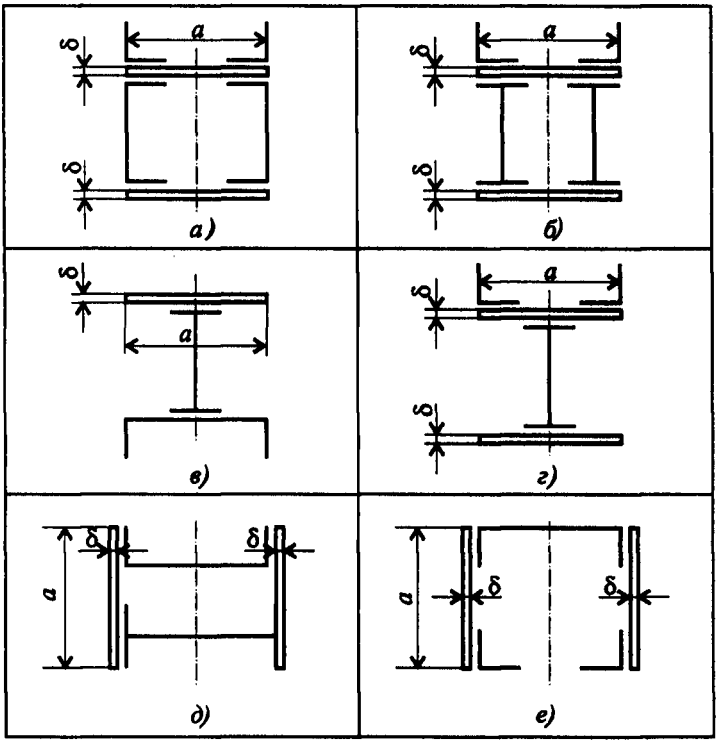
Задание 1. Определить координаты центра тяжести заданного сечения.



Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B, мм	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
b, мм	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
H, мм	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
h, мм	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
R, мм	20	25	25	30	30	40	40	50	50	60

Задание 2. Определить координаты центра тяжести составного сечения. Сечения состоят из листов с поперечными размерами $a \times \delta$ и прокатных профилей по ГОСТ 8239–89, ГОСТ 8240–89 и ГОСТ 8509–86. Уголок выбирается наименьшей толщины.

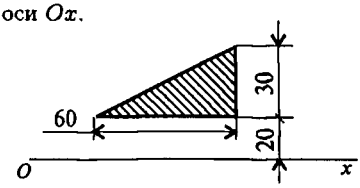
Размеры стандартных профилей в Приложении 1.



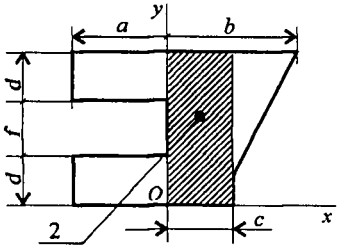
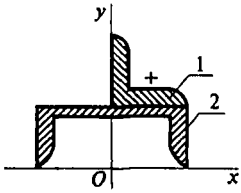
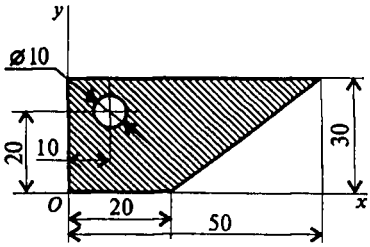
Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ швеллера	18	18а	20	20а	22	22а	24	24а	27	30
№ двутавра	18	18а	20	20а	22	22а	24	24а	27	30
№ уголка	8	8	9	9	10	10	11	11	12,5	14
a, мм	180	200	200	220	220	240	240	260	270	300
δ, мм	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6

При защите работ ответить на вопросы тестового задания.

Тема 1.6. Статика. Центр тяжести тела

Вопросы	Ответы	Код
1. Выбрать формулы для расчета координат центра тяжести тела, составленного из объемных частей.	$x_C = \frac{\sum G_k x_k}{\sum G_k}$; $y_C = \frac{\sum G_k y_k}{\sum G_k}$	1
	$x_C = \frac{\sum \ell_k x_k}{\sum \ell_k}$; $y_C = \frac{\sum \ell_k y_k}{\sum \ell_k}$	2
	$x_C = \frac{\sum A_k x_k}{\sum A_k}$; $y_C = \frac{\sum A_k y_k}{\sum A_k}$	3
	$x_C = \frac{\sum V_k x_k}{\sum V_k}$; $y_C = \frac{\sum V_k y_k}{\sum V_k}$	4
2. Вычислить статический момент данной плоской фигуры относительно оси Ox. 	$9 \cdot 10^3$ мм^3	1
	$27 \cdot 10^3$ мм^3	2
	$36 \cdot 10^3$ мм^3	3
	$42 \cdot 10^3$ мм^3	4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
3. Определить координаты центра тяжести фигуры 2 относительно осей Ox и Oy; $a = 80$ мм; $b = 90$ мм; $c = 30$ мм; $d = f = 20$ мм. 	$x_C = 15$ мм, $y_C = 30$ мм	1
	$x_C = -40$ мм, $y_C = 35$ мм	2
	$x_C = 25$ мм, $y_C = 50$ мм	3
	$x_C = -25$ мм, $y_C = 30$ мм	4
4. Определить координату y_C центра тяжести фигуры 1 (уголок $70 \times 70 \times 5$) относительно оси Ox (фигура 2 — швеллер № 20). 	64 мм	1
	83 мм	2
	95 мм	3
	163,5 мм	4
5. Вычислить координату y_C центра тяжести составного сечения. 	19 мм	1
	21 мм	2
	17 мм	3
	25 мм	4

Практическое занятие 4
Темы 1.8, 1.9. Кинематика точки. Простейшие движения твердого тела

Знать формулы для определения параметров поступательного и вращательного движений и кинематические графики.

Уметь определять кинематические параметры тела при поступательном и вращательном движениях, определять параметры любой точки тела.

Расчетные формулы для определения параметров поступательного движения тела

Все точки тела движутся одинаково.

Закон равномерного движения: $S = S_0 + vt$.

Закон равнопеременного движения: $S = S_0 + v_0 t + \dfrac{a_t t^2}{2}$.

Здесь S_0 — путь, пройденный до начала отсчета, м;

v_0 — начальная скорость движения, м/с;

a_t — постоянное касательное ускорение, м/с^2

Скорость: $v = S'$; $v = v_0 + a_t t$.

Ускорение: $a_t = v'$.

Закон неравномерного движения: $S = f(t^3)$.

Кинематические графики поступательного движения представлены на рис. П4.1.

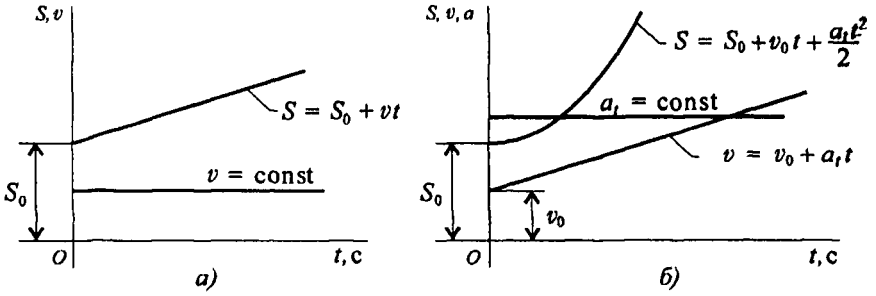


Рис. П4.1

Расчетные формулы для определения параметров вращательного движения

Точки тела движутся по окружностям вокруг неподвижной оси (оси вращения).

Закон равномерного вращательного движения: $\varphi = \varphi_0 + \omega t$.

Закон равнопеременного вращательного движения:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Закон неравномерного вращательного движения: $\varphi = f(t^3)$.

Здесь φ — угол поворота тела за время t, рад;

ω — угловая скорость, рад/с;

φ_0 — угол поворота, на который развернулось тело до начала отсчета;

ω_0 — начальная угловая скорость;

ε — угловое ускорение, рад/с^2;

Угловая скорость: $\omega = \varphi'$; $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$;

Угловое ускорение: $\varepsilon = \omega'$.

Кинематические графики вращательного движения представлены на рис. П4.2.

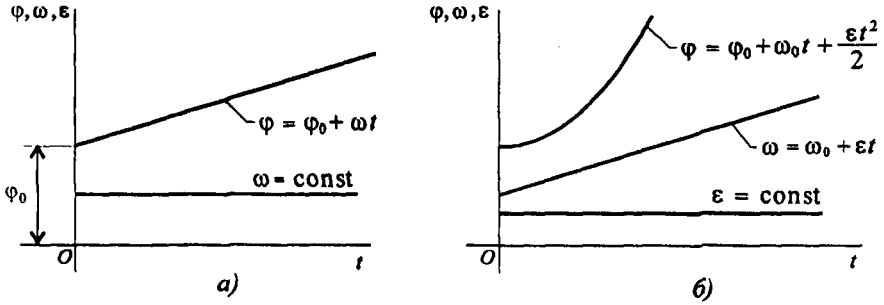


Рис. П4.2

Число оборотов вращения тела: $z = \varphi/(2\pi)$.

Угловая частота вращения: n, об/мин.

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

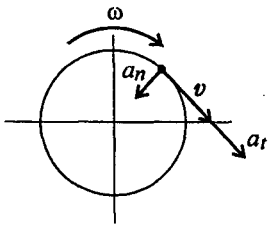


Рис П4.3

Параметры движения точки вращающегося тела (рис. П4.3):

v — линейная скорость точки A: $v = \omega r$, м/с;

a_t — касательное ускорение точки A $a_t = \varepsilon r$, м/с^2;

a_n — нормальное ускорение точки A: $a_n = w^2 r$, м/с^2.

Рекомендации для решения задач расчетно-графической работы

Задание 1

1. Определить вид движения на каждом участке по приведенному кинематическому графику.

2. Записать законы движения шкива на каждом участке. Параметры движения в конце каждого участка являются начальными параметрами движения на каждом последующем.

3. Определить полный угол поворота шкива за время вращения. Использовать формулу для перехода от угловой частоты вращения к угловому ускорению.

4. Определить полное число оборотов шкива, используя формулу

$$z = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

5. Построить графики угловых перемещений и угловых ускорений.

6. Определить нормальное и касательное ускорения точки на ободе шкива в указанные моменты времени.

Задание 2

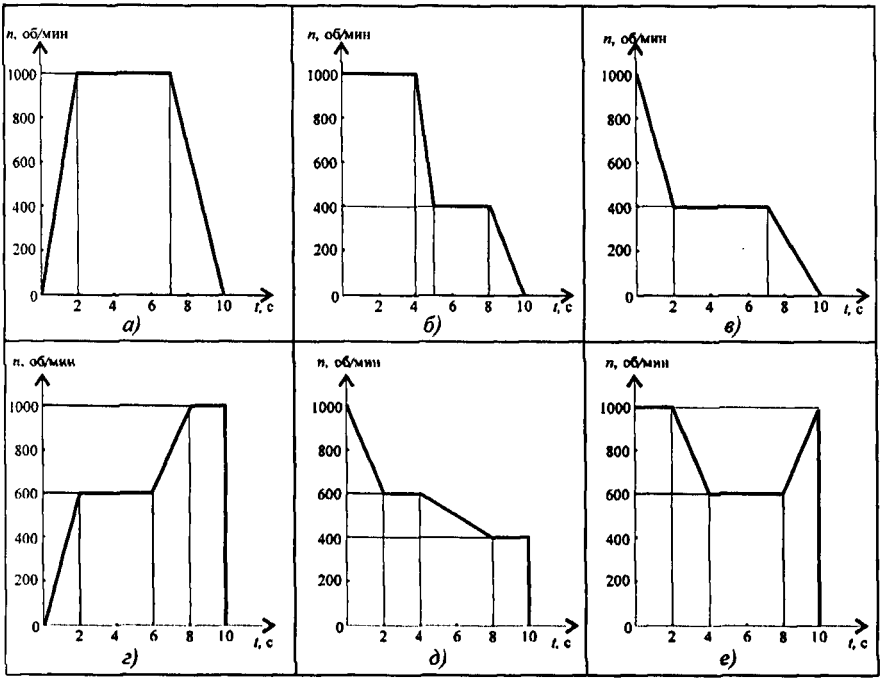
1. Подставив заданные коэффициенты в общее уравнение движения, определить вид движения.

2. Определить уравнение скорости и ускорения груза.

Расчетно-графическая работа

Задание 1. Частота вращения шкива диаметром d меняется согласно графику. Определить полное число оборотов шкива за время движения и среднюю угловую скорость за это же время. Построить

график угловых перемещений и угловых ускорений шкива. Определить ускорения точек обода колеса в моменты времени t_1 и t_2.



Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Диаметр шкива, м	0,2	0,3	0,4	0,6	0,5	0,8	0,2	0,6	0,5	0,8
t_1, с	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
t_2, с	8	9	8	9	8	6	9	8	9	6

Задание 2. Движение груза A задано уравнением $y = at^2 + bt + c$, где $[y] =$ м, $[t] =$ с. Определить скорость и ускорение груза в моменты времени t_1 и t_2, а также скорость и ускорение точки B на ободе барабана лебедки (рис. П4.4).

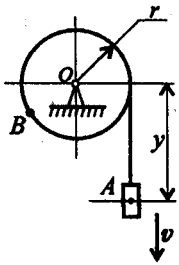


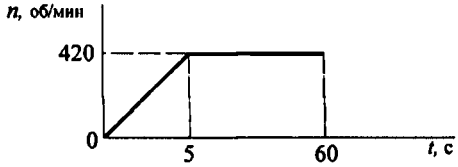
Рис. П4.4

Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a, м/с^2	2	0	3	0	3	3	2	0	4	0
b, м/с	0	3	4	2	0	4	0	3	4	2
c, м	3	4	0	5	2	0	4	2	0	3
r, м	0,2	0,4	0,6	0,8	0,5	0,4	0,3	0,2	0,8	0,6
t_1, с	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
t_2, с	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4

При защите работы ответить на вопросы тестового задания.

Тема 1.9. Кинематика. Простейшие движения твердого тела

Вопросы	Ответы	Код
1. По заданному закону вращения вала $\varphi = 0,25t^3 + 4t$ определить вид движения (φ — в радианах; t — в секундах).	Равномерное	1
	Равноускоренное	2
	Равнозамедленное	3
	Переменное	4
2. Закон вращательного движения колеса $\varphi = 4t - 0,25t^2$. Определить время до полной остановки.	6 с	1
	8 с	2
	10 с	3
	12 с	4
3. Определить число оборотов до полной остановки колеса. Движение описано в вопросе 2.	0	1
	1,25 оборотов	2
	2,55 оборотов	3
	3,65 оборотов	4

Продолжение		
Вопросы	**Ответы**	**Код**
4. Колесо вращается с угловой скоростью 52 рад/с. Радиус колеса 45 мм. Определить полное ускорение точек на ободе колеса.	71,7 м/с^2	1
	101,6 м/с^2	2
	121,7 м/с^2	3
	173,7 м/с^2	4
5. Частота вращения вала меняется согласно графику. Определить полное число оборотов за время движения. 	2530 рад	1
	385,4	2
	402,9	3
	2420 рад	4

Практическое занятие 5
Темы 1.14, 1.15. Работа и мощность. Общие теоремы динамики

Знать зависимости для определения мощности при поступательном и вращательном движениях. КПД.

Знать основные уравнения динамики при поступательном и вращательном движениях твердого тела.

Уметь рассчитывать мощность с учетом потерь на трени и сил инерции.

Уметь определять параметры движения с помощью теорем динамики.

Расчетные формулы

Мощность при поступательном движении

$$P = Fv\cos\alpha,$$

где F — постоянная сила, Н; v — скорость движения, м/с; α — угол между направлениями силы и перемещения.

Мощность при вращении

$$P = M\omega,$$

где M — вращающий момент, Н·м; ω — угловая скорость, рад/с.

Коэффициент полезного действия

$$\text{КПД} = \frac{P_{\text{пол}}}{P_{\text{затр}}},$$

где $P_{\text{пол}}$ — полезная мощность, Вт; $P_{\text{затр}}$ — затраченная мощность, В

Сила инерции

$$\boldsymbol{F}_{\text{ин}} = -m\boldsymbol{a},$$

где $\boldsymbol{a}$ — ускорение точки, м/с^2; m — масса, кг.

Основные уравнения динамики

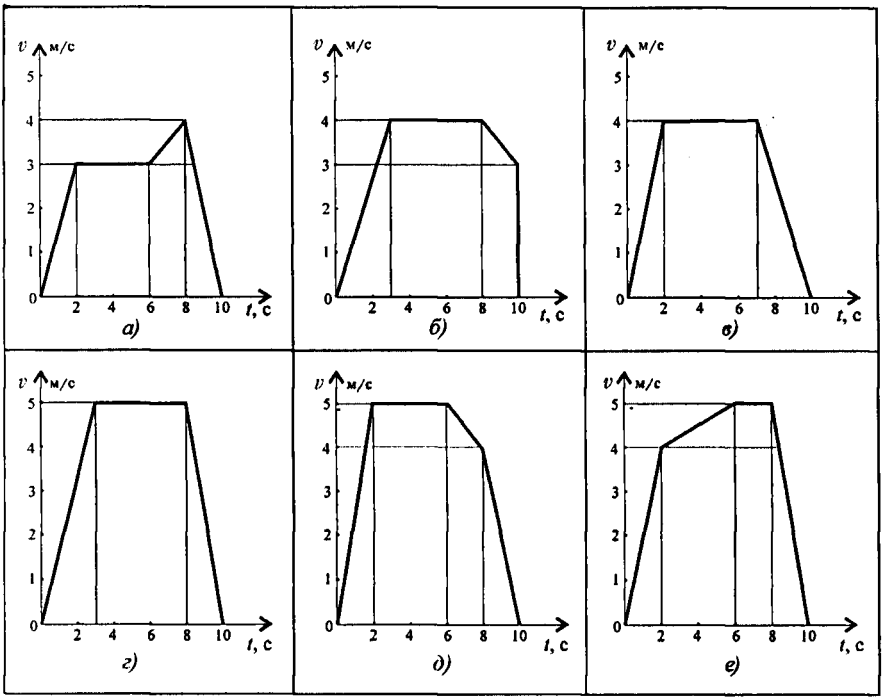
Поступательное движение твердого тела: $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.

Вращательное движение твердого тела: $M_z = \mathcal{J}\varepsilon$,

где M_z — суммарный момент внешних сил относительно оси вращения, Н·м; $\mathcal{J}$ — момент инерции относительно оси вращения, кг·м^2 ε — угловое ускорение, рад/с^2.

Расчетно-графическая работа

Задание 1. Скорость кабины лифта массой m изменяется согласно графикам. Определить величину натяжения каната, на котором подвешен лифт, при подъеме и опускании. По максимальной величине натяжения каната определить потребную мощность электродвигателя.



Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Масса m, кг	500	700	750	800	600	800	600	450	900	850
КПД механизма	0,8	0,75	0,8	0,75	0,8	0,75	0,8	0,75	0,8	0,75

Рекомендации по выполнению задания.

1. Используя принцип Даламбера, определить натяжение канат кабины лифта на каждом участке движения (Лекция 14, пример 3

2. Определить максимальное натяжение каната.

3. По максимальному натяжению каната определить максимальную потребную мощность для подъема груза.

4. По заданной величине КПД механизма определить максимальную мощность двигателя.

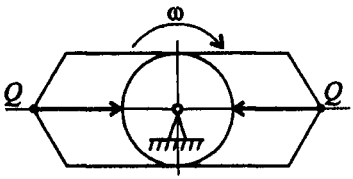


Рис. П5.1

Задание 2. Шкив массой m тормозится за счет прижатия колодок силами 2 кН (рис. П5.1). Определить время торможения шкива, если в момент наложения колодок частота вращения шкива равна 450 об/мин. При расчете шкив принять за сплошной диск. Движение считать равнозамедленным.

Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, м	0,45	0,45	0,55	0,45	0,36	0,35	0,28	0,30	0,32	0,34
m, кг	35					45				
f	0,35	0,42	0,42	0,35	0,45	0,44	0,43	0,36	0,37	0,38

Рекомендации по выполнению задания.

1. По величине усилия прижатия колодок к диску и заданному коэффициенту трения определить момент трения колодок.

2. Определить момент инерции диска.

3. Используя основное уравнение динамики, определить угловое ускорение (замедление) при торможении.

4. Из уравнения скорости при равнопеременном движении определить время торможения.

При защите работы ответить на вопросы тестового задания.

Темы 1.14 и 1.15. Динамика. Работа и мощность. Общие теоремы динамики

Вопросы	Ответы	Код
1. Лебедкой поднимают груз массой 300 кг со скоростью 0,5 м/с. Мощность двигателя 2 кВт. Определить общий КПД механизма.	0,079	1
	0,935	2
	0,625	3
	0,736	4
2. Определить величину тормозной силы, если за 4 с его скорость упала с 12 м/с до 4 м/с. Сила тяжести — 104 Н.	5,2 Н	1
	15,9 Н	2
	10,6 Н	3
	21,2 Н	4
3. Чему равна работа сил, приложенных к прямолинейно движущемуся телу, если его скорость увеличилась с 15 м/с до 25 м/с. Масса тела 1000 кг.	11,25 кДж	1
	20 кДж	2
	75 кДж	3
	112,5 кДж	4
4. Сплошной однородный цилиндр массой m вращается относительно своей продольной оси. От чего зависит значение момента инерции цилиндра?	Только от r	1
	От m и r	2
	От l и m	3
	От l, m и r	4
5. Под действием вращающего момента $M = 200$ Н · м колесо вращается равноускоренно из состояния покоя и за 4 с его скорость достигла 320 об/мин. Определить момент инерции колеса.	23,8 кг · м^2	1
	48 кг · м^2	2
	96 кг · м^2	3
	108 кг · м^2	4

РАЗДЕЛ II

Сопротивление материалов

ЛЕКЦИЯ 18

Тема 2.1. Основные положения. Гипотезы и допущения

Иметь представление о видах расчетов в сопротивлении материалов, о классификации нагрузок, о внутренних силовых факторах и возникающих деформациях, о механических напряжениях.

Знать основные понятия, гипотезы и допущения в сопротивлении материалов.

«*Сопротивление материалов*» — это раздел «Технической механики», в котором излагаются теоретико-экспериментальные основы и методы расчета наиболее распространенных элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

В сопротивлении материалов пользуются данными смежных дисциплин: физики, теоретической механики, материаловедения, математики и др. В свою очередь сопротивление материалов как наука является опорной базой для целого ряда технических дисциплин.

Любые создаваемые конструкции должны быть не только прочными и надежными, но и недорогими, простыми в изготовлении и обслуживании, с минимальным расходом материалов, труда и энергии.

Расчеты сопротивления материалов являются базовыми для обеспечения основных требований к деталям и конструкциям.

Основные требования к деталям и конструкциям и виды расчетов в сопротивлении материалов

Механические свойства материалов

Прочность — способность не разрушаться под нагрузкой.

Жесткость — способность незначительно деформироваться под нагрузкой.

Выносливость — способность длительное время выдерживать переменные нагрузки.

Устойчивость — способность сохранять первоначальную форму упругого равновесия.

Вязкость — способность воспринимать ударные нагрузки.

Виды расчетов

Расчет на прочность обеспечивает неразрушение конструкции.

Расчет на жесткость обеспечивает деформации конструкции под нагрузкой в пределах допустимых норм.

Расчет на выносливость обеспечивает необходимую долговечность элементов конструкции.

Расчет на устойчивость обеспечивает сохранение необходимой формы равновесия и предотвращает внезапное искривление длинных стержней.

Для обеспечения прочности конструкций, работающих при ударных нагрузках (при ковке, штамповке и подобных случаях), проводятся *расчеты на удар.*

Основные гипотезы и допущения

Приступая к расчетам конструкции, следует решить, что в данном случае существенно, а что можно отбросить, т. к. решение технической задачи с полным учетом всех свойств реального объекта невозможно.

Допущения о свойствах материалов

Материалы *однородные* — в любой точке материалы имеют одинаковые физико-механические свойства.

Материалы представляют *сплошную среду* — кристаллическое строение и микроскопические дефекты не учитываются.

Материалы *изотропны* — механические свойства не зависят от направления нагружения.

Материалы обладают *идеальной упругостью* — полностью восстанавливают форму и размеры после снятия нагрузки.

В реальных материалах эти допущения выполняются лишь отчасти, но принятие таких допущений упрощает расчет. Все упрощения принято компенсировать, введя запас прочности.

Допущения о характере деформации

Все материалы под нагрузкой деформируются, т. е. меняют форму и размеры.

Характер деформации легко проследить при испытании материалов на растяжение.

Перед испытаниями цилиндрический образец закрепляется в захватах разрывной машины, растягивается и доводится до разрушения. При этом записывается зависимость между приложенным усилием и деформацией. Получают график, называемый диаграммой растяжения. Для примера на рис. 18.1 представлена диаграмма растяжения малоуглеродистой стали.

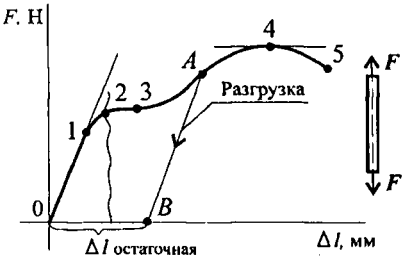


Рис. 18.1

На диаграмме отмечают особые точки:

— от точки 0 до точки 1 — *прямая* линия (деформация прямо пропорциональна нагрузке);

— от точки 2 до точки 5 деформации быстро нарастают и образец разрушается, разрушению предшествует появление *утончения* (шейки) в точке 4.

Если прервать испытания до точки 2, образец вернется к исходным размерам; эта область называется *областью упругих деформаций*. Упругие деформации полностью исчезают после снятия нагрузки.

При продолжении испытаний после точки 2 образец уже не возвращается к исходным размерам, деформации начинают накапливаться.

При выключении машины в точке A образец несколько сжимается по линии AB, параллельной линии 01. Деформации после точки 2 называются *пластическими*, *они полностью не исчезают*; сохранившиеся деформации называются *остаточными*.

На участке 01 выполняется закон Гука:

В пределах упругости деформации прямо пропорциональны нагрузке.

Считают, что *все материалы подчиняются закону Гука.*

Поскольку упругие деформации *малы* по сравнению с геометрическими размерами детали, при расчетах считают, что *размеры под*

нагрузкой не изменяются.

Расчеты ведут используя *принцип начальных размеров. При работе конструкции деформации должны оставаться упругими.*

К нарушению прочности следует относить и возникновение пластических деформаций. Хотя в практике бывают случаи, когда местные пластические деформации считаются допустимыми.

Классификация нагрузок и элементов конструкции

Классификация нагрузок

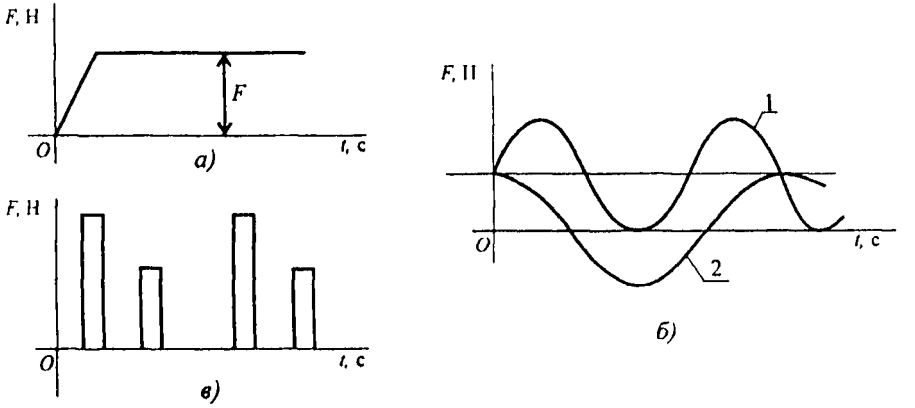


Рис. 18.2

Статические нагрузки (рис. 18.2*а*) не меняются со временем или меняются очень медленно. При действии статических нагрузок проводится расчет на прочность.

Повторно-переменные нагрузки (рис. 18.2*б*) многократно меняют значение или значение и знак. Действие таких нагрузок вызывает усталость металла.

Динамические нагрузки (рис. 18.2*в*) меняют свое значение в короткий промежуток времени, они вызывают большие ускорения и силы инерции и могут привести к внезапному разрушению конструкции.

Из теоретической механики известно, что по способу приложения нагрузки могут быть *сосредоточенными* или *распределенными* по поверхности.

Реально передача нагрузки между деталями происходит не в точке, а на некоторой площадке, т. е. нагрузка является распределенной.

Однако если площадка контакта пренебрежительно мала по сравнению с размерами детали, силу считают сосредоточенной.

При расчетах реальных деформируемых тел в сопротивлении материалов заменять распределенную нагрузку сосредоточенной не следует.

Аксиомы теоретической механики в сопротивлении материалов используются ограниченно.

Нельзя переносить пару сил в другую точку детали, перемещать сосредоточенную силу вдоль линии действия, нельзя систему сил заменять равнодействующей при определении перемещений Все вышеперечисленное меняет распределение внутренних сил в конструкции.

Формы элементов конструкции

Все многообразие форм сводится к трем видам по одному признаку.

1. *Брус* — любое тело, у которого длина значительно больше других размеров.

В зависимости от форм продольной оси и поперечных сечении различают несколько видов брусьев:

— прямой брус постоянного поперечного сечения (рис. 18.3а);

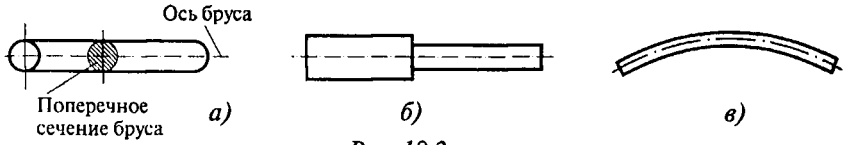


Рис. 18.3

— прямой ступенчатый брус (рис. 18.3б);

— криволинейный брус (рис. 18.3в).

2. *Пластина* — любое тело, у которого толщина значительно меньше других размеров (рис. 18.4).

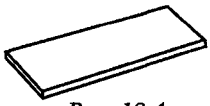


Рис. 18.4

3. *Массив* — тело, у которого три размера одного порядка.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется прочностью, жесткостью, устойчивостью?

2. По какому принципу классифицируют нагрузки в сопротивлении материалов? К какому виду разрушений приводят повторно-переменные нагрузки?

3. Какие нагрузки принято считать сосредоточенными?

4. Какое тело называют брусом? Нарисуйте любой брус и укажите ось бруса и его поперечное сечение. Какие тела называют пластинами?

5. Что называется деформацией? Какие деформации называют упругими?

6. При каких деформациях выполняется закон Гука? Сформулируйте закон Гука.

7. Что такое принцип начальных размеров?

8. В чем заключается допущение о сплошном строении материалов? Поясните допущение об однородности и изотропности материалов.

ЛЕКЦИЯ 19

Тема 2.1. Основные положения. Нагрузки внешние и внутренние, метод сечений

Знать метод сечений, внутренние силовые факторы, составляющие напряжений.

Уметь определять виды нагружений и внутренние силовые факторы в поперечных сечениях.

Элементы конструкции при работе испытывают внешнее воздействие, которое оценивается величиной внешней силы. К внешним силам относят активные силы и реакции опор.

Под действием внешних сил в детали возникают внутренние силы упругости, стремящиеся вернуть телу первоначальную форму и размеры.

Внешние силы должны быть определены методами теоретической механики, а внутренние определяются основным методом сопротивления материалов — методом сечений.

В сопротивлении материалов тела рассматриваются в равновесии. Для решения задач используют уравнения равновесия, полученные в теоретической механике для тела в пространстве.

Используется система координат, связанная с телом. Чаще продольную ось детали обозначают z, начало координат совмещают с левым краем и размещают в центре тяжести сечения.

Метод сечений

Метод сечений заключается в мысленном рассечении тела плоскостью и рассмотрении равновесия любой из отсеченных частей.

Если все тело находится в равновесии, то и каждая его часть находится в равновесии под действием внешних и внутренних сил. *Внутренние силы определяются из уравнений равновесия, составленных для рассматриваемой части тела.*

Рассекаем тело поперек плоскостью (рис. 19.1). Рассматриваем правую часть. На нее действуют внешние силы $\boldsymbol{F}_4$; $\boldsymbol{F}_5$; $\boldsymbol{F}_6$ и вну-

тренние силы упругости q_k, распределенные по сечению. Систему распределенных сил можно заменить главным вектором R_0, помещенным в центр тяжести сечения, и суммарным моментом сил M_0: $R_0 = \sum_0^n q_k$; $M_0 = \sum_0^n m_k$.

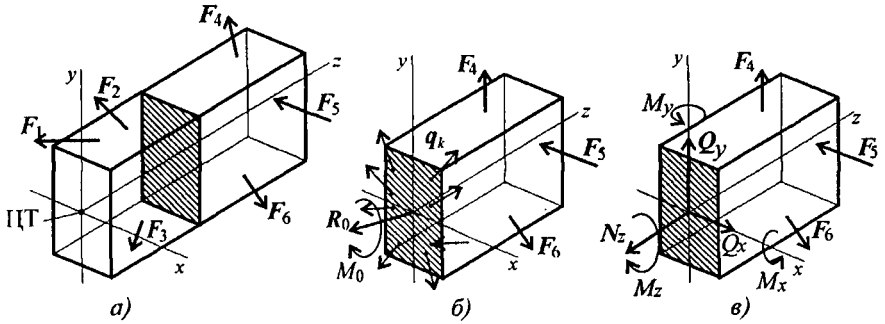


Рис. 19.1

Разложив главный вектор R_0 по осям, получим три составляющие:

$$R_0 = N_z + Q_y + Q_x;$$

где N_z — продольная сила;

Q_x — поперечная сила по оси x;

Q_y — поперечная сила по оси y.

Главный момент тоже принято представлять в виде моментов пар сил в трех плоскостях проекции:

$$M_0 = M_x + M_y + M_z,$$

M_x — момент сил относительно Ox; M_y — момент сил относительно Oy; M_z — момент сил относительно Oz.

Полученные составляющие сил упругости носят название *внутренних силовых факторов*. Каждый из внутренних силовых факторов вызывает определенную деформацию детали. Внутренние силовые факторы уравновешивают приложенные к этому элементу детали внешние силы. Используя шесть уравнений равновесия, можно

получить величину внутренних силовых факторов:

$$N_z = \sum_0^n F_{kz}; \qquad M_z = \sum_0^n m_z(F_k);$$

$$Q_x = \sum_0^n F_{kx}; \qquad M_x = \sum_0^n m_x(F_k);$$

$$Q_y = \sum_0^n F_{ky}; \qquad M_y = \sum_0^n m_y(F_k).$$

Из приведенных уравнений следует, что:

N_z — *продольная сила*, равная алгебраической сумме проекций на ось Oz внешних сил, действующих на отсеченную часть бруса; вызывает растяжение или сжатие;

Q_x — *поперечная сила*, равная алгебраической сумме проекций на ось Ox внешних сил, действующих на отсеченную часть;

Q_y — *поперечная сила*, равная алгебраической сумме проекций на ось Oy внешних сил, действующих на отсеченную часть;

силы Q_x и Q_y вызывают сдвиг сечения;

M_z — *крутящийся момент*, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно продольной оси Oz; вызывает скручивание бруса;

M_x — *изгибающий момент*, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси Ox;

M_y — *изгибающий момент*, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси Oy;

моменты M_x и M_y вызывают изгиб бруса в соответствующей плоскости.

Напряжения

Метод сечений позволяет определить величину внутреннего силового фактора в сечении, но не дает возможности установить закон распределения внутренних сил по сечению. Для оценки прочности необходимо определить величину силы, приходящуюся на любую точку поперечного сечения.

Величину интенсивности внутренних сил в точке поперечного сечения называют *механическим напряжением*. Напряжение характеризует величину внутренней силы, приходящейся на единицу площади поперечного сечения.

Рассмотрим брус, к которому приложена внешняя нагрузка (рис. 19.2). С помощью *метода сечений* рассечем брус поперечной плоскостью, отбросим левую часть и рассмотрим равновесие оставшейся правой части. Выделим на секущей плоскости малую площадку ΔA. На этой площадке действует равнодействующая внутренних сил упругости.

Направление напряжения $p_{ср}$ совпадает с направлением внутренней силы в этом сечении.

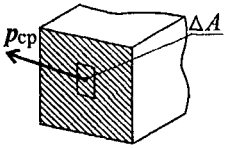


Рис. 19.2

Вектор $p_{ср}$ называют *полным напряжением*. Его принято раскладывать на два вектора (рис. 19.3): τ — лежащий в площадке сечения и σ — направленный перпендикулярно площадке.

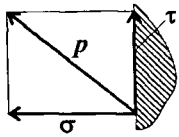


Рис. 19.3

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Если вектор p — пространственный, то его раскладывают на три составляющие:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2}.$$

Нормальное напряжение характеризует сопротивление сечения растяжению или сжатию.

Касательное напряжение характеризует сопротивление сечения сдвигу.

Сила N (продольная) вызывает появление нормального напряжения σ. Силы Q_x и Q_y вызывают появление касательных напряжений τ. Моменты изгибающие M_x и M_y вызывают появление нормальных напряжений σ, переменных по сечению.

Крутящий момент M_z вызывает сдвиг сечения вокруг продольной оси, поэтому появляются касательные напряжения τ.

Примеры решения задач

Пример 1. Определить величину продольной силы в сечении 1–1 (рис. 19.4).

Решение

Используем уравнение равновесия $\sum\limits_{0}^{n} F_{kz} = 0$.

Рассматривая левую часть бруса, определяем $N_{z1} = -12+8-5=9$ кН
Рассматривая правую часть бруса, определяем $N_{z1} = 23 - 14 = 9$ кН

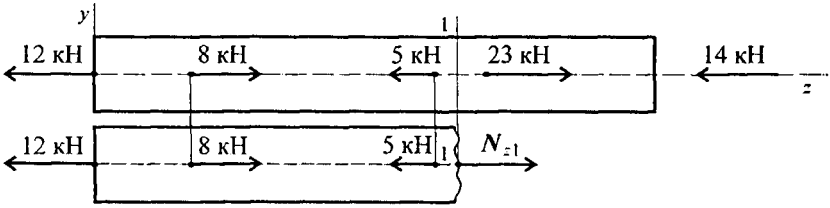
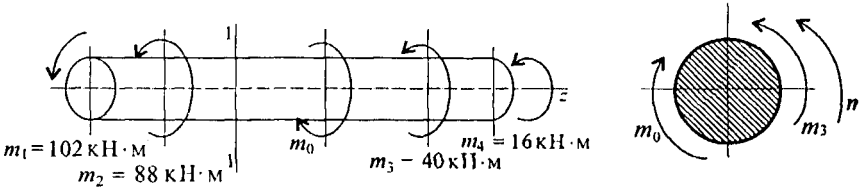


Рис. 19.4

Величина продольной силы в сечении не зависит от того, какая часть бруса рассматривается.

Пример 2. Определить внутренний силовой фактор в сечении 1–1 (рис. 19.5а).

Решение



а) *б)*

Рис. 19.5

Используем уравнение равновесия $\sum m_z = 0$.
$m_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$; $m_0 = 246$ кН · м.

Рассматриваем правую часть бруса. На отсеченную часть бруса принято смотреть со стороны отброшенной части (рис. 19.5б) Получаем $M_z = 246 - 40 - 16 = 190$ кН · м.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие силы в сопротивлении материалов считают внешними? Какие силы являются внутренними?

2. Какими методами определяют внешние силы? Как называют метод для определения внутренних сил?

3. Сформулируйте метод сечений.

4. Как в сопротивлении материалов располагают систему координат?

5. Что в сопротивлении материалов называют внутренними силовыми факторами? Сколько в общем случае может возникнуть внутренних силовых факторов?

6. Запишите систему уравнений, используемую при определении внутренних силовых факторов в сечении?

7. Как обозначается и как определяется продольная сила в сечении?

8. Как обозначаются и как определяются поперечные силы?

9. Как обозначаются и определяются изгибающие и крутящий моменты?

10. Какие деформации вызываются каждым из внутренних силовых факторов?

11. Что называют механическим напряжением?

12. Как по отношению к площадке направлены нормальное и касательные напряжения? Как они обозначаются?

13. Какие напряжения возникают в поперечном сечении при действии продольных сил?

14. Какие напряжения возникают при действии поперечных сил?

15. С помощью метода сечений определите величину внутреннего силового фактора в сечении 1–1 и вид нагружения (рис. 19.6).

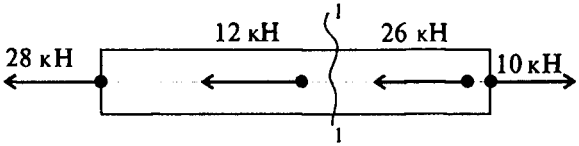


Рис. 19.6

16. С помощью метода сечений определите величину момента m_4, величину внутреннего силового фактора в сечении 2–2 и вид нагружения (рис. 19.7).

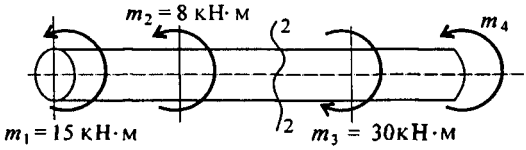
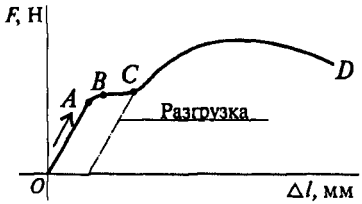
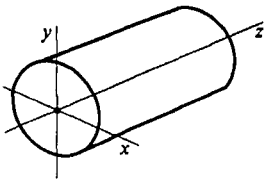


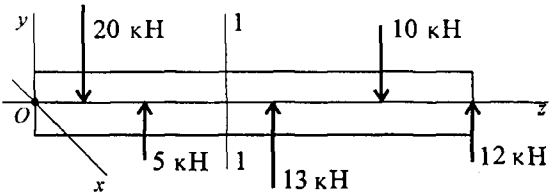
Рис. 19.7

17. Ответьте на вопросы тестового задания.

Тема 2.1. Основные положения, метод сечений, напряжения

Вопросы	Ответы	Код
1. Как называется способность элемента конструкции сопротивляться упругим деформациям?	Прочность	1
	Жесткость	2
	Устойчивость	3
	Износостойкость	4
2. Представлена диаграмма растяжения материала. Назвать участок упругих деформаций. 	OA	1
	AB	2
	BC	3
	OF	4
3. Какой внутренний силовой фактор возникает в поперечном сечении бруса при кручении? 	N	1
	Q_y	2
	M_z	3
	M_y	4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
4. Пользуясь методом сечений, определить величину поперечной силы в сечении 1–1. 	5 кН	1
	15 кН	2
	13 кН	3
	22 кН	4
5. Какие механические напряжения в поперечном сечении бруса при нагружении называют нормальными?	Возникающие при нормальной работе	1
	Направленные перпендикулярно площадке	2
	Направленные параллельно площадке	3
	Лежащие в площадке сечения	4

ЛЕКЦИЯ 20

Тема 2.2. Растяжение и сжатие. Внутренние силовые факторы, напряжения. Построение эпюр

Иметь представление о продольных силах, о нормальных напряжениях в поперечных сечениях.

Знать правила построения эпюр продольных сил и нормальных напряжений, закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении бруса.

Уметь строить эпюры продольных сил и нормальных напряжени

Растяжение и сжатие

Растяжением или *сжатием* называют вид нагружения, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор — продольная сила.

Продольные силы меняются по длине бруса. При расчетах после определения величин продольных сил по сечениям строится график — эпюра продольных сил.

Условно назначают знак продольной силы.

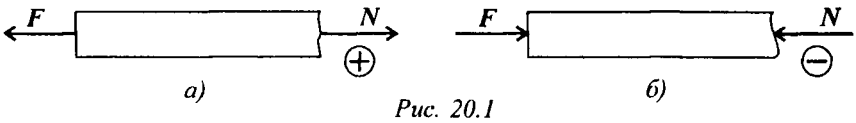


Рис. 20.1

Если продольная сила направлена *от сечения*, то брус растянут. Растяжение считают положительной деформацией (рис. 20.1а).

Если продольная сила направлена *к сечению*, то брус сжат. Сжатие считают отрицательной деформацией (рис. 20.1б).

Примеры построения эпюры продольных сил

Рассмотрим брус, нагруженный внешними силами вдоль оси. Брус закреплен в стене (закрепление «заделка») (рис. 20.2а).

Делим брус на участки нагружения.

Участком нагружения считают часть бруса между внешними силами.

На представленном рисунке 3 участка нагружения.

Воспользуемся методом сечений и определим внутренние силовые факторы внутри каждого участка.

Расчет начинаем со свободного конца бруса, чтобы не определять величины реакций в опорах.

Участок 1: $\sum F_z = 0$; $-3F + N_1 = 0$; $N_1 = 3F$. Продольная сила положительна, участок 1 растянут.

Участок 2: $\sum F_z = 0$; $-3F + 2F + N_2 = 0$; $N_2 = F$. Продольная сила положительна, участок 2 растянут.

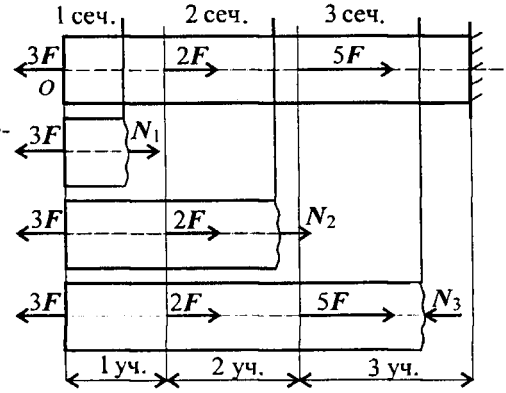


Рис. 20.2а

Участок 3: $\sum F_z = 0$; $-3F + 2F + 5F - N_3 = 0$; $N_3 = 4F$. Продольная сила отрицательна, участок 3 сжат. Полученное значение N_3 равно реакции в заделке.

Под схемой бруса строим эпюру продольной силы (рис. 20.2б).

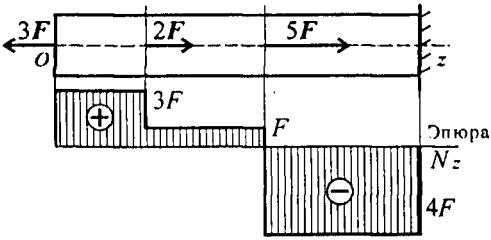


Рис. 20.2б

Эпюрой продольной силы называется график распределения продольной силы вдоль оси бруса.

Ось эпюры параллельна продольной оси.

Нулевая линия проводится тонкой линией. Значения сил откладывают от оси, положительные — вверх отрицательные — вниз.

В пределах одного участка значение силы не меняется, поэтому эпюра очерчивается отрезками прямых линий, параллельными оси Oz.

Правило контроля: *в месте приложения внешней силы на эпюре должен быть скачок на величину приложенной силы.*

На эпюре проставляются значения N_z. Величины продольных сил откладывают в заранее выбранном масштабе.

Эпюра по контуру обводится толстой линией и заштриховывается *поперек* оси.

Изучая деформации при растяжении и сжатии, обнаруживаем, что выполняются *гипотеза плоских сечений* и *принцип смягчения граничных условий.*

Гипотеза плоских сечений заключается в том, что поперечное сечение бруса, плоское и перпендикулярное продольной оси, после деформации остается плоским и перпендикулярным продольной оси.

Следовательно, *продольные внутренние волокна удлиняются одинаково, а внутренние силы упругости распределены по сечению равномерно.*

Принцип смягчения граничных условий гласит: в точках тела, удаленных от мест приложения нагрузки, *модуль внутренних сил мало зависит от способа закрепления.* Поэтому при решении задач *не уточняют способ закрепления.*

Напряжения при растяжении и сжатии

При растяжении и сжатии в сечении действует только нормальное напряжение.

Напряжения в поперечных сечениях могут рассматриваться как силы, приходящиеся на единицу площади.

Таким образом, *направление и знак напряжения* в сечении *совпадают с направлением и знаком силы в сечении* (рис. 20.3).

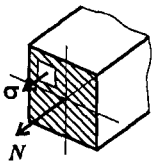


Рис. 20.3

Исходя из гипотезы плоских сечений, можно предположить, что напряжения при растяжении и сжатии в пределах каждого сечения не меняются. Поэтому напряжение можно рассчитать по формуле

$$\sigma = \frac{N_z}{A},$$

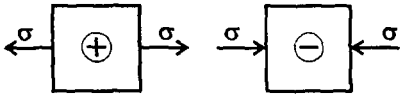
где N_z — продольная сила в сечении; A — площадь поперечного сечения.

Величина напряжения прямо пропорциональна продольной силе и обратно пропорциональна площади поперечного сечения.

Нормальные напряжения действуют при растяжении от сечения (рис. 20.4а), а при сжатии к сечению (рис. 20.4б).

Размерность (единица измерения) напряжений — Н/м^2 (Па), однако это слишком малая единица, и практически напряжения рассчитывают в Н/мм^2 (МПа): $1\,\text{МПа} = 10^6\,\text{Па} = 1\,\text{Н/мм}^2$.

При определении напряжений брус разбивают на участки нагружений, в пределах которых продольные силы не изменяются, и *учитывают места изменений площади поперечных сечений.*



а) *Рис. 20.4* *б)*

Рассчитывают напряжения по сечениям, и расчет оформляют в виде эпюры нормальных напряжений.

Строится и оформляется такая эпюра так же, как и эпюра продольных сил.

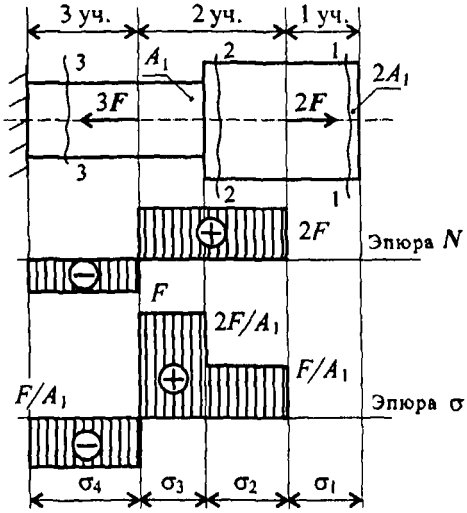


Рис. 20.5

Рассмотрим брус, нагруженный внешними силами вдоль оси (рис. 20.5).

Обнаруживаем три участка нагружения и определяем величины продольных сил.

Участок 1: $N_1 = 0$. Внутренние продольные силы равны нулю.

Участок 2: $N_2 = 2F$. Продольная сила на участке положительна.

Участок 3: $N_3 = 2F - 3F = -F$. Продольная сила на участке отрицательна.

Брус — ступенчатый.

С учетом изменений величин площади поперечного сечения участков напряжений больше.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2A_1} = 0; \quad \sigma_2 = \frac{F}{A_1} \oplus, \quad \sigma_3 = \frac{2F \oplus}{A_1}; \quad \sigma_4 = \frac{-F}{A_1} \ominus.$$

Строим эпюры продольных сил и нормальных напряжений.

Масштабы эпюр могут быть *разными* и выбираются исходя из удобства построения.

Примеры решения задач

Ступенчатый брус нагружен вдоль оси двумя силами. Брус защемлен с левой стороны (рис. 20.6). Пренебрегая весом бруса, построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений.

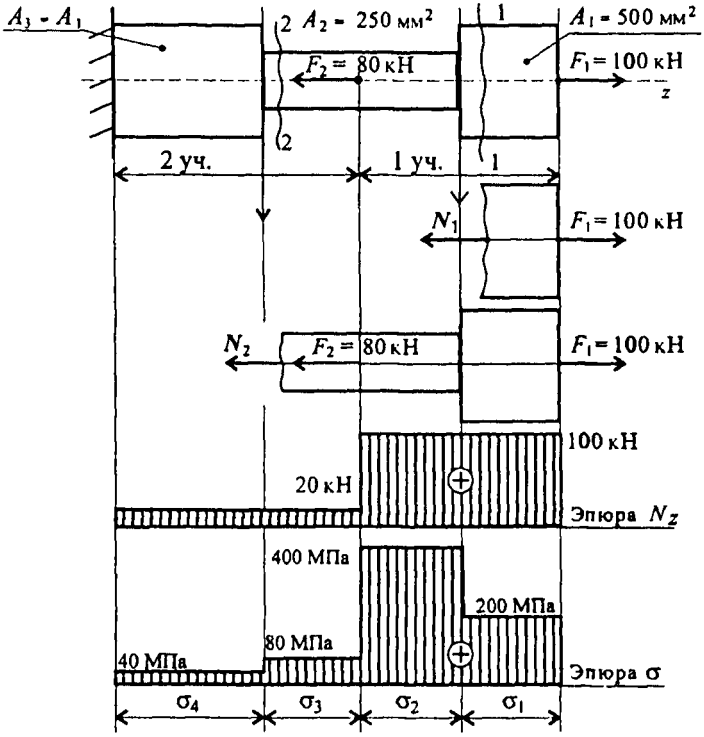


Рис. 20.6

Решение

1. Определяем участки нагружения, их два.
2. Определяем продольную силу в сечениях 1 и 2.
3. Строим эпюру.
4. Рассчитываем величины нормальных напряжений и строим эпюру нормальных напряжений в собственном произвольном масштабе.

1. Определяем продольные силы.

$$\sum F_z = 0.$$

Сечение 1. $-N_1 + F_1 = 0$; $N_1 = F_1 = 100\,\text{кН}$.

Сечение 2. $-80 - N_2 + 100 = 0$; $N_2 = 100 - 80 = 20\,\text{кН}$.

В обоих сечениях продольные силы положительны.

2. Определяем нормальные напряжения $\sigma = \dfrac{N_z}{A}$.

Сопоставляя участки нагружения с границами изменения площади, видим, что образуется 4 участка напряжений.

Нормальные напряжения в сечениях по участкам:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{100 \cdot 10^3}{500} = 200\,\text{Н/мм}^2; \quad \sigma_2 = \frac{N_1}{A_2} = \frac{100 \cdot 10^3}{250} = 400\,\text{Н/мм}^2;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{20 \cdot 10^3}{250} = 80\,\text{Н/мм}^2; \quad \sigma_4 = \frac{N_2}{A_3} = \frac{20 \cdot 10^3}{500} = 40\,\text{Н/мм}^2.$$

Откладываем значения напряжений вверх от оси, т. к. значения их положительные (растяжение). Масштаб эпюр продольной силы и нормальных напряжений выбирается отдельно в зависимости от порядка цифр и имеющегося на листе места.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие внутренние силовые факторы возникают в сечении бруса при растяжении и сжатии?
2. Как распределяются по сечению силы упругости при растяжении и сжатии? (Использовать гипотезу плоских сечений.)
3. Какого характера напряжения возникают в поперечном сечении при растяжении и сжатии: нормальные или касательные?
4. Как распределены напряжения по сечению при растяжении и сжатии?
5. Запишите формулу для расчета нормальных напряжений при растяжении и сжатии.
6. Как назначаются знаки продольной силы и нормального напряжения?
7. Что показывает эпюра продольной силы?
8. Как изменится величина напряжения, если площадь поперечного сечения возрастет в 4 раза?
9. В каких единицах измеряется напряжение?

ЛЕКЦИЯ 21

Тема 2.2. Растяжение и сжатие. Продольные и поперечные деформации. Закон Гука

Иметь представление о продольных и поперечных деформациях и их связи.

Знать закон Гука, зависимости и формулы для расчета напряжений и перемещений.

Уметь проводить расчеты на прочность и жесткость статически определимых брусьев при растяжении и сжатии.

Деформации при растяжении и сжатии

Рассмотрим деформацию бруса под действием продольной силы $\boldsymbol{F}$ (рис. 21.1).

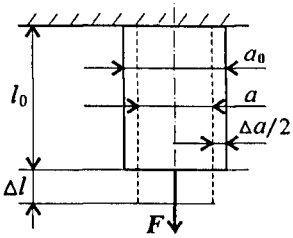


Рис. 21.1

Начальные размеры бруса: l_0 — начальная длина, a_0 — начальная ширина.

Брус удлиняется на величину Δl; Δl— абсолютное удлинение. При растяжении поперечные размеры уменьшаются, Δa — абсолютное сужение; $\Delta l > 0$; $\Delta a < 0$.

При сжатии выполняется соотношение $\Delta l < 0$; $\Delta a > 0$.

В сопротивлении материалов принято рассчитывать деформации в относительных единицах:

$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$; ε — относительное удлинение;

$\varepsilon' = \dfrac{\Delta a}{a_0}$; ε' — относительное сужение.

Между продольной и поперечной деформациями существует зависимость

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon,$$

где μ — коэффициент поперечной деформации, или коэффициент Пуассона, —характеристика пластичности материала.

Закон Гука

В пределах упругих деформаций деформации прямо пропорциональны нагрузке:

$$F = k\Delta l,$$

где F — действующая нагрузка; k — коэффициент.

В современной форме:

$$\sigma = \frac{N}{A}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Получим зависимость $\sigma = E\varepsilon$, где E — модуль упругости, характеризует жесткость материала.

В пределах упругости нормальные напряжения пропорциональны относительному удлинению.

Значение E для сталей в пределах $(2 \div 2{,}1) \cdot 10^5$ МПа.

При прочих равных условиях, чем жестче материал, тем меньше он деформируется:

$$\downarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E \uparrow}.$$

Формулы для расчета перемещений поперечных сечений бруса при растяжении и сжатии

Используем известные формулы.

Закон Гука $\sigma = E\varepsilon$.

Откуда $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$.

Относительное удлинение $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$.

В результате получим зависимость между нагрузкой, размерами бруса и возникающей деформацией:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}; \quad \sigma = \frac{N}{A};$$

$$\Delta l = \frac{\sigma l}{E} \quad \text{или} \quad \Delta l = \frac{Nl}{AE},$$

где Δl — абсолютное удлинение, мм;

σ — нормальное напряжение, МПа;

l — начальная длина, мм;
E — модуль упругости материала, МПа;
N — продольная сила, Н;
A — площадь поперечного сечения, мм^2;
Произведение AE называют *жесткостью сечения.*

Выводы

1. Абсолютное удлинение бруса прямо пропорционально величине продольной силы в сечении, длине бруса и обратно пропорционально площади поперечного сечения и модулю упругости.

2. Связь между продольной и поперечной деформациями зависит от свойств материала, связь определяется *коэффициентом Пуассона*, называемом *коэффициентом поперечной деформации.*

Коэффициент Пуассона: у стали μ от 0,25 до 0,3; у пробки $\mu = 0$; у резины $\mu = 0{,}5$.

3. Поперечные деформации меньше продольных и редко влияют на работоспособность детали; при необходимости поперечная деформация рассчитывается через продольную.

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{\Delta a}{a_0}; \quad \text{откуда} \quad \Delta a = \varepsilon' a_0,$$

где Δa — поперечное сужение, мм; a_0 — начальный поперечный размер, мм.

4. Закон Гука выполняется в зоне упругих деформаций, которая определяется при испытаниях на растяжение по диаграмме растяжения (рис. 21.2).

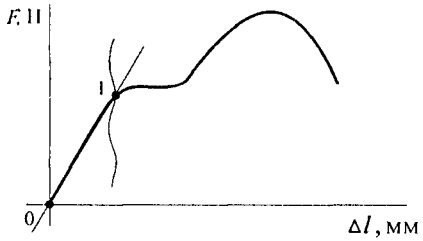


Рис. 21.2

При работе пластические деформации не должны возникать, упругие деформации малы по сравнению с геометрическими размерами тела. Основные расчеты в сопротивлении материалов проводятся в зоне упругих деформаций, где действует закон Гука.

На диаграмме (рис. 21.2) *закон Гука действует от точки* 0 *до точки* 1.

5. Определение деформации бруса под нагрузкой и сравнение ее с допускаемой (не нарушающей работоспособности бруса) называют *расчетом на жесткость.*

Примеры решения задач

Дана схема нагружения и размеры бруса до деформации (рис. 21.3). Брус защемлен, определить перемещение свободного конца.

Решение

1. Брус ступенчатый, поэтому следует построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений.

Делим брус на участки нагружения, определяем продольные силы, строим эпюру продольных сил.

2. Определяем величины нормальных напряжений по сечениям с учетом изменений площади поперечного сечения.

Строим эпюру нормальных напряжений.

3. На каждом участке определяем абсолютное удлинение. Результаты алгебраически суммируем.

П р и м е ч а н и е. Балка *защемлена*, в заделке возникает *неизвестная реакция* в опоре, поэтому расчет начинаем со *свободного* конца (справа).

1. Два участка нагружения:

участок 1: $N_1 = +25$ кН; растянут;

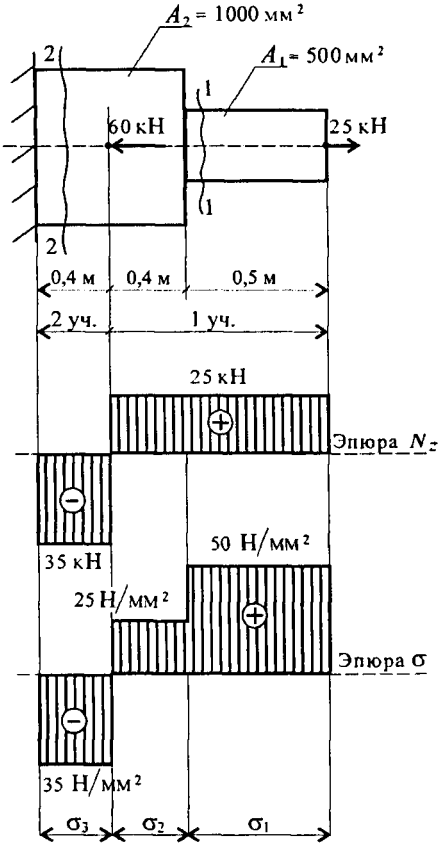


Рис. 21.3

участок 2: $25 - 60 + N_2 = 0$; $N_2 = -35$ кН; сжат.

2. Три участка по напряжениям:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}; \quad \sigma_1 = \frac{25 \cdot 10^3}{500} = 50\,\text{Н/мм}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_1}{A_2}; \quad \sigma_2 = \frac{25 \cdot 10^3}{1000} = 25\,\text{Н/мм}^2;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_2}{A_2}; \quad \sigma_3 = \frac{-35 \cdot 10^3}{1000} = -35\,\text{Н/мм}^2.$$

3. Удлинения участков (материал — сталь $E = 2 \cdot 10^5$ МПа):

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E}; \quad \Delta l_1 = \frac{50 \cdot 0{,}5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = 0{,}125\,\text{мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E}; \quad \Delta l_2 = \frac{25 \cdot 0{,}4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = 0{,}05\,\text{мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3 l_3}{E}; \quad \Delta l_3 = \frac{-35 \cdot 0{,}4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = -0{,}07\,\text{мм}.$$

4. Суммарное удлинение бруса (перемещение свободного конца).

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3; \quad \Delta l = 0{,}125 + 0{,}05 - 0{,}07 = 0{,}105\,\text{мм}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Стальной стержень длиной 1,5 м вытянулся под нагрузкой на 3 мм. Чему равно относительное удлинение? Чему равно относительное сужение? ($\mu = 0{,}25$.)

2. Что характеризует коэффициент поперечной деформации?

3. Сформулируйте закон Гука в современной форме при растяжении и сжатии.

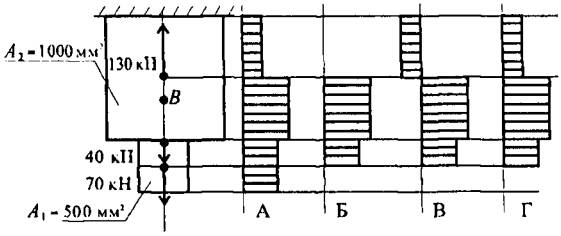
4. Что характеризует модуль упругости материала? Какова единица измерения модуля упругости?

5. Запишите формулы для определения удлинения бруса. Что характеризует произведение AE и как оно называется?

6. Как определяют абсолютное удлинение ступенчатого бруса, нагруженного несколькими силами?

7. Ответьте на вопросы тестового задания.

Тема 2.2. Растяжение и сжатие

Вопросы	Ответы	Код
1. Выбрать соответствующую эпюру продольных сил в поперечных сечениях бруса. 	А	1
	Б	2
	В	3
	Г	4
2. Для бруса, изображенного на схеме к вопросу 1, рассчитать наибольшую продольную силу, возникшую в поперечном сечении.	70 кН	1
	130 кН	2
	110 кН	3
	200 кН	4
3. Определить нормальное напряжение в точке B (схема к вопросу 1).	110 МПа	1
	220 МПа	2
	80 МПа	3
	140 МПа	4
4. Проверить прочность изображенного в вопросе 1 бруса, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа?	$\sigma = [\sigma]$	1
	$\sigma > [\sigma]$	2
	$\sigma < [\sigma]$	3
	Верный ответ не приведен	4
5. Определить перемещение свободного конца бруса, если известны длины участков бруса: $l_1 = 0,4$ м; $l_2 = 0,6$ м; $l_3 = 0,4$ м; $l_4 = 0,2$ м (схема к вопросу 1).	0,42 мм	1
	0,22 мм	2
	0,62 мм	3
	0,66 мм	4

ЛЕКЦИЯ 22

Тема 2.2. Механические испытания, механические характеристики. Предельные и допускаемые напряжения

Иметь представление о предельных и допускаемых напряжениях и коэффициенте запаса прочности.

Знать диаграммы растяжения и сжатия пластичных и хрупких материалов, порядок расчетов на прочность.

При выборе материалов для элементов конструкции и расчетов на прочность необходимо знать механические характеристики. Необходимые сведения получают экспериментально при испытаниях на растяжение, сжатие, срез, кручение и изгиб.

Механические испытания. Статические испытания на растяжение и сжатие

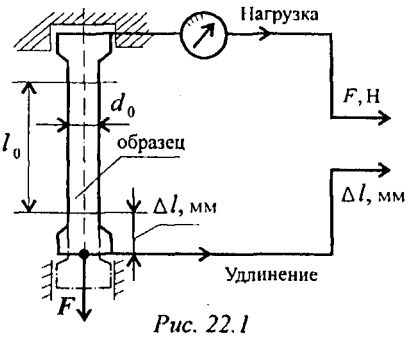


Рис. 22.1

Это стандартные испытания: оборудование — стандартная разрывная машина, стандартный образец (круглый или плоский), стандартная методика расчета.

На рис. 22.1 представлена схема испытаний (d_0 — начальный диаметр поперечного сечения; l_0 — начальная длина).

На рис. 22.2 изображена схема образца до (рис. 22.2а) и после (рис. 22.2б) испытаний ($d_ш$ — диаметр шейки, сужения перед разрывом).

Образец закрепляется в зажимах разрывной машины и растягивается до разрыва. Машина снабжена прибором для автоматической записи диаграммы растяжения — зависимости между нагрузкой и абсолютным удлинением (рис. 22.3 — диаграмма растяжения для малоуглеродистой стали).

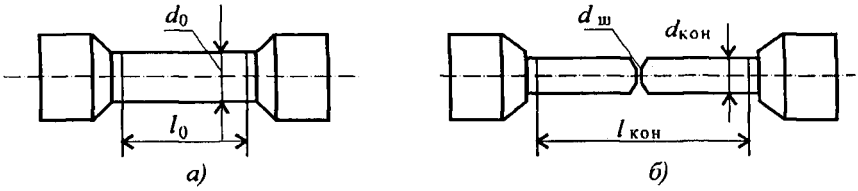


Рис. 22.2

Полученная диаграмма пересчитывается и перестраивается (рис. 22.4 — приведенная диаграмма растяжения первого типа).

Особые точки диаграммы растяжения обозначены точками 1, 2, 3, 4, 5:

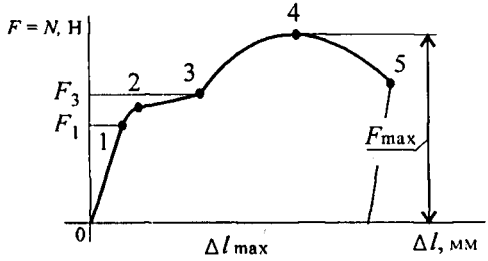


Рис. 22.3

1) точка 1 соответствует *пределу пропорциональности*: после нее прямая линия (прямая пропорциональность) заканчивается и переходит в кривую;

участок 01 — удлинение Δl растет пропорционально нагрузке; подтверждается закон Гука;

2) точка 2 соответствует *пределу упругости* материала: материал теряет упругие свойства — *способность вернуться к исходным размерам*;

3) точка 3 является концом участка, на котором образец *сильно деформируется без увеличения нагрузки*. Это явление называют *текучестью*; *текучесть — удлинение при постоянной нагрузке*;

4) точка 4 соответствует *максимальной нагрузке*, в этот момент на образце образуется *«шейка»* — резкое уменьшение площади поперечного сечения. Напряжение в этой точке называют *временным сопротивлением разрыву*, или *условным пределом прочности*. Зона 3–4 называется зоной упрочнения.

Механические характеристики

При построении приведенной диаграммы рассчитываются величины, имеющие условный характер, усилия в каждой из точек

делят на величину *начальной площади поперечного сечения*, хотя в каждый момент идет деформация и площадь образца уменьшается. Приведенная диаграмма растяжения не зависит от абсолютных размеров образца (рис. 22.4).

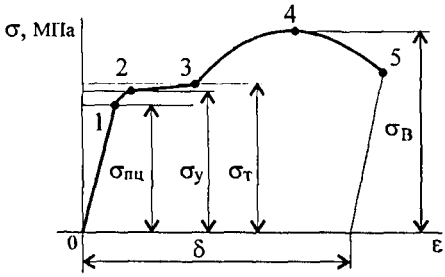


Рис. 22.4

Основные характеристики прочности:

— предел пропорциональности $\sigma_{пц} = F_1/A_0$;

— предел упругости $\sigma_у = F_2/A_0$;

— предел текучести $\sigma_т = F_3/A_0$;

— предел прочности, или временное сопротивление разрыву, $\sigma_в = F_{max}/A_0$, где $A_0 = (\pi d_0^2)/4$ — начальная площадь сечения.

Характеристики пластичности материала

δ — максимальное удлинение в момент разрыва

$$\delta = \frac{\Delta l_{max}}{l_0} \cdot 100\,\%,$$

где Δl_{max} — максимальное остаточное удлинение (рис. 22.3);

ψ — максимальное сужение при разрыве

$$\psi = \frac{A_0 - A_ш}{A_0} \cdot 100\,\%,$$

где $A_ш$ — площадь образца в месте разрыва.

Характеристики пластичности определяют способность материала к деформированию, чем выше значения δ и ψ, тем материал пластичнее.

Виды диаграмм растяжения

Различные материалы по-разному ведут себя под нагрузкой, характер деформаций и разрушения зависит от типа материалов.

Принято делить материалы по типу их диаграмм растяжения на три группы. К первой группе относят *пластичные материалы*, эти материалы имеют на диаграмме растяжения *площадку текучести* (диаграммы первого типа) (рис. 22.5а). Ко второй группе относятся *хрупкие материалы*, эти материалы *мало деформируются*, разрушаются по хрупкому типу. На диаграмме нет площадки текучести (рис. 22.5б).

К третьей группе относят *материалы, не имеющие площадку текучести*, но значительно деформирующиеся под нагрузкой, их называют *пластично-хрупкими* (рис. 22.5в).

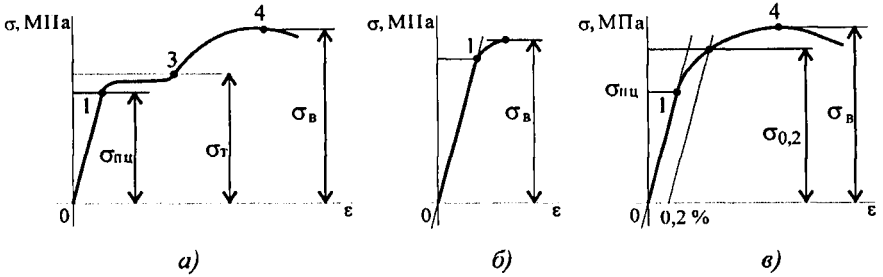


Рис. 22.5

Таким образом, *хрупкий и пластично-хрупкий материалы не имеют площадки текучести*, а в справочниках отсутствует характеристика «предел текучести». По этой особенности их можно узнать.

Пластично-хрупкие материалы значительно деформируются, этого нельзя допустить в работающей конструкции. Поэтому их *деформацию обычно ограничивают*. Максимально возможная относительная деформация $\varepsilon = 0{,}2\,\%$. По величине максимально возможной деформации определяется соответствующее нормальное напряжение $\sigma_{0,2}$, которое принимают за предельное.

Предельные и допустимые напряжения

Предельным напряжением считают напряжение, при котором

в материале возникает опасное состояние (разрушение или опасная дефомация).

Для *пластичных* материалов предельным напряжением считают *предел текучести*, т. к. возникающие пластические деформации не исчезают после снятия нагрузки:

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{т}}.$$

Для *хрупких* материалов, где пластические деформации отсутствуют, а разрушение возникает по хрупкому типу (шейки не образуется), за предельное напряжение принимают *предел прочности*:

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{в}}.$$

Для *пластично-хрупких* материалов предельным напряжением считают напряжение, соответствующее максимальной деформации 0,2 % ($\sigma_{0,2}$):

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{0,2}.$$

Допускаемое напряжение — максимальное напряжение, при котором материал должен нормально работать.

Допускаемые напряжения получают по предельным с учетом запаса прочности:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[s]},$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение; s — коэффициент запаса прочности; $[s]$ — допускаемый коэффициент запаса прочности.

Примечание. В квадратных скобках принято обозначать допускаемое значение величины.

Допускаемый коэффициент запаса прочности зависит от качества материала, условий работы детали, назначения детали, точности обработки и расчета и т. д.

Он может колебаться от 1,25 для простых деталей до 12,5 для сложных деталей, работающих при переменных нагрузках в условиях ударов и вибраций.

Особенности поведения материалов при испытаниях на сжатие

1. Пластичные материалы практически одинаково работают при растяжении и сжатии. Механические характеристики при растяжении и сжатии одинаковы.

2. Хрупкие материалы обычно обладают большей прочностью при сжатии, чем при растяжении: $\sigma_{вр} < \sigma_{вс}$.

Если допускаемое напряжение при растяжении и сжатии различно, их обозначают $[\sigma_р]$ (растяжение), $[\sigma_с]$ (сжатие).

Расчеты на прочность при растяжении и сжатии

Расчеты на прочность ведутся по условиям прочности — неравенствам, выполнение которых гарантирует прочность детали при данных условиях.

Для обеспечения прочности расчетное напряжение не должно превышать допускаемого напряжения:

$$\sigma \leqslant [\sigma], \text{ где } \sigma = \frac{N}{A}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[s]}.$$

Расчетное напряжение σ зависит *от нагрузки и размеров* поперечного сечения, допускаемое только *от материала детали* и условий работы.

Существуют три вида расчета на прочность.

1. ***Проектировочный расчет*** — задана расчетная схема и нагрузки; *материал или размеры детали подбираются*:

— определение размеров поперечного сечения:

$$A \geqslant \frac{N}{[\sigma]};$$

— подбор материала

$$\sigma_{пред} \geqslant \frac{N[s]}{A};$$

по величине $\sigma_{пред}$ можно подобрать марку материала.

2. ***Проверочный расчет*** — известны нагрузки, материал, размеры детали; необходимо *проверить, обеспечена ли прочность*.

Проверяется неравенство

$$\sigma = \frac{N}{A} \leqslant [\sigma].$$

3. ***Определение нагрузочной способности*** (максимальной нагрузки): $[N] = [\sigma]A$.

Примеры решения задач

Прямой брус растянут силой 150 кН (рис. 22.6), материал — сталь $\sigma_т = 570$ МПа, $\sigma_в = 720$ МПа, запас прочности $[s] = 1{,}5$. Определить размеры поперечного сечения бруса.

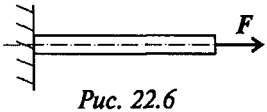


Рис. 22.6

Решение

1. Условие прочности: $\sigma = \dfrac{N}{A} \leqslant [\sigma]$.

2. Потребная площадь поперечного сечения определяется соотношением $A \geqslant \dfrac{N}{[\sigma]}$.

3. Допускаемое напряжение для материала рассчитывается из заданных механических характеристик. Наличие предела текучести означает, что материал — пластичный.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_т}{[s]}; \quad [\sigma] = \frac{570}{1{,}5} = 380 \text{ МПа}.$$

4. Определяем величину потребной площади поперечного сечения бруса и подбираем размеры для двух случаев.

$$A \geqslant \frac{150 \cdot 10^3}{380} = 394{,}7 \text{ мм}^2.$$

Сечение — круг, определяем диаметр.

$$A = \pi R^2; \quad R = \sqrt{\frac{A}{\pi}}; \quad R = \sqrt{\frac{394{,}7}{3{,}14}} = 11{,}2 \text{ мм}.$$

Полученную величину округляем в большую сторону $d = 25$ мм, $A = 4{,}91$ см^2.

Сечение — равнополочный уголок № 5 по ГОСТ 8509–86.

Ближайшая площадь поперечного сечения уголка — $A = 4{,}29$ см^2 ($d = 5$ мм). $4{,}91 > 4{,}29$ (Приложение 1).

Контрольные вопросы и задания

1. Какое явление называют текучестью?

2. Что такое «шейка», в какой точке диаграммы растяжения она образуется?

3. Почему полученные при испытаниях механические характеристики носят условный характер?

4. Перечислите характеристики прочности.

5. Перечислите характеристики пластичности.

6. В чем разница между диаграммой растяжения, вычерченной автоматически, и приведенной диаграммой растяжения?

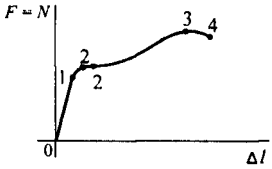
7. Какая из механических характеристик выбирается в качестве предельного напряжения для пластичных и хрупких материалов?

8. В чем различие между предельным и допускаемым напряжениями?

9. Запишите условие прочности при растяжении и сжатии. Отличаются ли условия прочности при расчете на растяжение и расчете на сжатие?

10. Ответьте на вопросы тестового задания.

Темы 2.2. Растяжение и сжатие

Вопросы	Ответы	Код
1. Выбрать на диаграмме растяжения участок упругих деформаций. 	01	1
	12	2
	23	3
	22	4
2. По какой характеристике определяется допускаемое напряжение для пластичных материалов?	$\sigma_т$	1
	$\sigma_{пц}$	2
	$\sigma_у$	3
	$\sigma_в$	4

Продолжение		
Вопросы	**Ответы**	**Код**
3. Выбрать наиболее точную запись условия прочности при растяжении и сжатии.	$\sigma = \frac{N}{A} = [\sigma]$	1
	$\sigma = \frac{N}{A} \geqslant [\sigma]$	2
	$\sigma = \frac{N}{A} \leqslant [\sigma]$	3
	$\sigma = \frac{N}{A} > [\sigma]$	4
4. Определить предел текучести материала, если: $F_{пц} = 12$ кН; $F_т = 14$ кН; $F_{max} = 20$ кН; $A = 50$ мм^2, A — площадь поперечного сечения.	280 МПа	1
	470 МПа	2
	560 МПа	3
	620 МПа	4
5. Проверить прочность материала, если: $\sigma = 320$ МПа; $\sigma_{пц} = 720$ МПа; $\sigma_т = 800$ МПа; $\sigma_в = 1000$ МПа; $[s] = 2,5$; s — запас прочности; σ — расчетное напряжение.	$\sigma > [\sigma]$	1
	$\sigma < [\sigma]$	2
	$\sigma = [\sigma]$	3
	Данных недостаточно	4

ЛЕКЦИЯ 23

Тема 2.3. Практические расчеты на срез и смятие. Основные предпосылки расчетов и расчетные формулы

Иметь представление об основных предпосылках и условностях расчетов о деталях, работающих на срез и смятие.

Знать внутренние силовые факторы, напряжения и деформации при сдвиге и смятии, условия прочности.

Уметь определять площади среза и смятия.

Детали соединений (болты, штифты, шпонки, заклепки) работают так, что можно учитывать только один внутренний силовой фактор — поперечную силу. Такие детали рассчитываются на сдвиг.

Сдвиг (срез)

Сдвигом называется нагружение, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор — поперечная сила.

Рассмотрим брус, на который действуют равные по величине, противоположно направленные, перпендикулярные продольной оси силы (рис. 23.1).

Применим метод сечений и определим внутренние силы упругости из условия равновесия каждой из частей бруса:

$$\sum F_y = 0; \quad F - Q = 0; \quad F = Q,$$

где Q — поперечная сила. Естественно считать, что она вызовет появление только касательных напряжений τ.

Рассмотрим напряженное состояние в точке B поперечного сечения.

Выделим элемент в виде бесконечно малого параллелепипеда, к граням которого приложены напряжения (рис. 23.2).

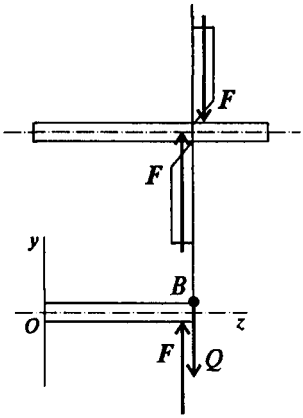


Рис. 23.1

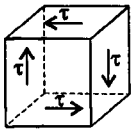


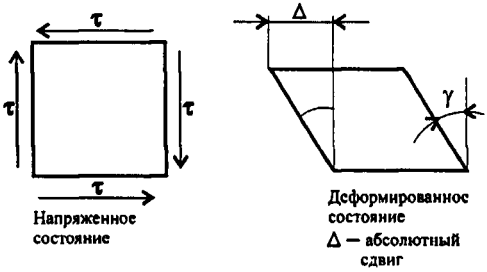
Рис. 23.2

Исходя из условия равновесия точки B, внутри бруса при возникновении касательного напряжения τ на правой вертикальной площадке такое же напряжение должно возникнуть и на левой площадке. Они образуют пару сил. На горизонтальных площадках возникнут такие же напряжения, образующие такую же пару обратного направления (рис. 23.3).

Такое напряженное состояние называется чистым сдвигом. Здесь действует *закон парности касательных напряжений*:

При сдвиге в окрестностях точки на взаимно перпендикулярных площадках возникают равные по величине касательные напряжения, направленные на соседних площадках либо от ребра, либо к ребру (рис. 23.3а).

В результате площадки сдвигаются на угол γ, называемый *углом сдвига*.



а) *Рис. 23.3* *б)*

При сдвиге выполняется закон Гука, который в данном случае записывается следующим образом: $\tau = G\gamma$.

Здесь τ — напряжение; G — модуль упругости сдвига; γ — угол сдвига.

При отсутствии специальных испытаний G можно рассчитать по формуле $G \cong 0{,}4E$, E — модуль упругости при растяжении. $[G] = $ МПа.

Расчет деталей на сдвиг носит условный характер.

Для упрощения расчетов принимается ряд допущений:

— при расчете на сдвиг изгиб деталей не учитывается, хотя силы, действующие на деталь, образуют пару;

— при расчете считаем, что силы упругости распределены по сечению равномерно;

— если для передачи нагрузки используют несколько деталей, считаем, что внешняя сила распределяется между ними равномерно.

Откуда формула для расчета напряжений имеет вид:

$$\tau_c = \frac{Q}{A_c}; \quad Q = \frac{F}{z},$$

где τ_c — касательное напряжение; Q — поперечная сила; A_c — площадь сдвига; F — внешняя сдвигающая сила; z — количество деталей.

Условие прочности при сдвиге (срезе)

$$\tau_c = \frac{Q}{A_c} \leqslant [\tau_c],$$

$[\tau_c]$ — допускаемое напряжение сдвига, обычно его определяют по формуле

$$[\tau_c] = (0{,}25 \div 0{,}35)\sigma_т.$$

При разрушении деталь перерезается поперек. Разрушение детали под действием поперечной силы называют срезом.

Смятие

Довольно часто одновременно со сдвигом происходит смятие боковой поверхности в месте контакта в результате передачи нагрузки от одной поверхности к другой. При этом на поверхности возникают сжимающие напряжения, называемые *напряжениями смятия*, $\sigma_{см}$.

Расчет также носит условный характер. Допущения подобны принятым при расчете на сдвиг (см. выше), однако при расчете боковой цилиндрической поверхности напряжения по поверхности распределены *не равномерно*, поэтому расчет проводят для наиболее нагруженной точки (на рис. 23.4б). Для этого вместо боковой поверхности цилиндра в расчете используют плоскую поверхность, проходящую через диаметр. На рис. 23.4 показана примерная схема передачи давления на стержень заклепки.

Таким образом, условие прочности при смятии можно выразить соотношением

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} \leqslant [\sigma_{см}];$$

$A_{см} = d\delta$, где d — диаметр окружности сечения; δ — наименьшая высота соединяемых пластин; $A_{см}$ — расчетная площадь смятия;

допускаемое напряжение смятия: $[\sigma_{см}] = (0{,}35 \div 0{,}4)\sigma_т$; F — сил взаимодействия между деталями.

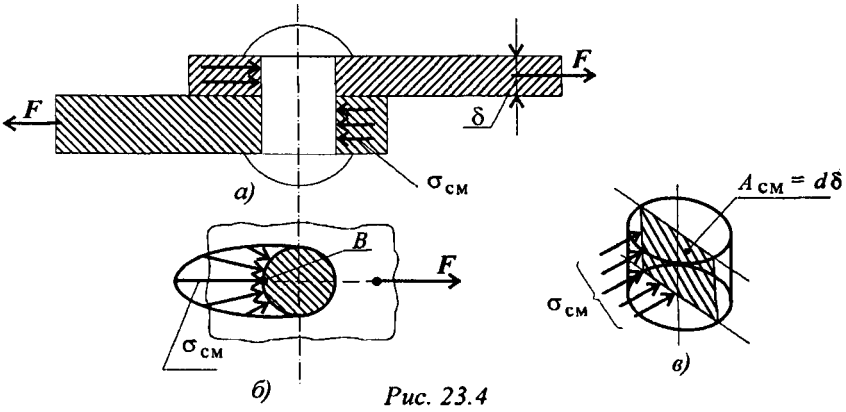


Рис. 23.4

Примеры деталей, работающих на сдвиг (срез) и смятие

1. Ось (рис. 23.5).

В случае, если толщина детали 2 меньше, $A_{см} = d\delta$; $A_с = \dfrac{\pi d^2}{4} i$; $i = 2$ — количество площадей среза.

2. Болт (рис. 23.6).

$$A_с = \pi d h; \quad A_{см} = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2).$$

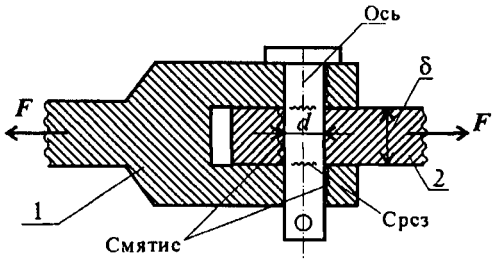


Рис. 23.5

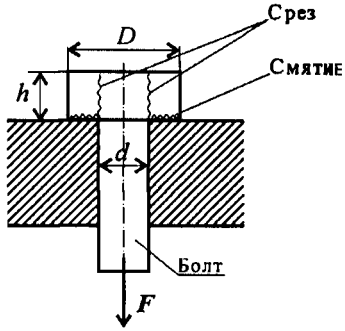


Рис. 23.6

3. Шпонки (рис. 23.7) работают на срез и смятие, но рассчитываются только на смятие.

$A_с = bl$; $A_{см} = lt$; где l — длина шпонки; t — высота выступающей части; b — ширина шпонки.

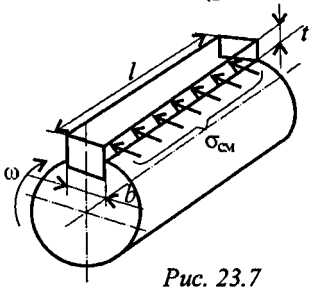


Рис. 23.7

4. Заклепка односрезная (рис. 23.8), двухсрезная (рис. 23.9).

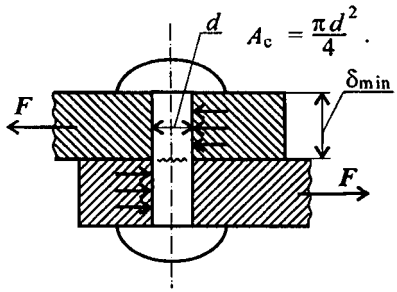


Рис. 23.8

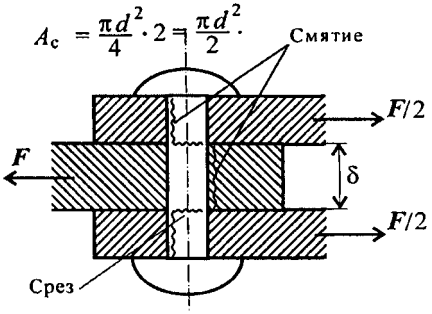


Рис. 23.9

5. Сварное соединение (рис. 23.10).

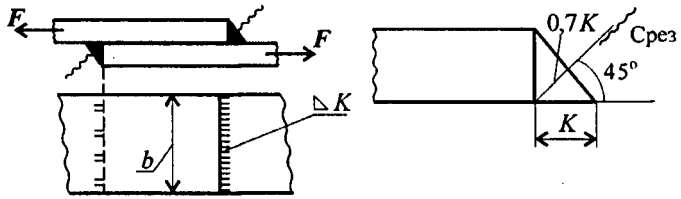


Рис. 23.10

Угловой шов разрушается под углом 45° к плоскости разъема в результате среза. K — катет углового шва, подбирается по толщине свариваемого листа.

Двухсторонний шов: $A_с = 2 \cdot 0{,}7Kb$.

ЛЕКЦИЯ 24

Тема 2.3. Практические расчеты на срез и смятие

Знать условия прочности при срезе и смятии.
Уметь проводить расчеты на срез и смятие.

Примеры решения задач

Пример 1. Определить потребное количество заклепок для передачи внешней нагрузки 120 кН. Заклепки расположить в один ряд. Проверить прочность соединяемых листов. Известно: $[\sigma] = 160$ МПа; $[\sigma_{см}] = 300$ МПа; $[\tau_с] = 100$ МПа; диаметр заклепок 16 мм.

Решение

1. Определить количество заклепок из расчета на сдвиг (рис. 24.1).

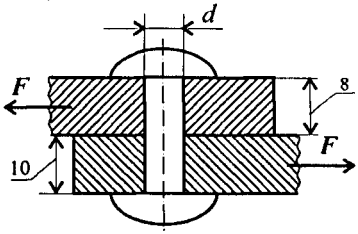


Рис. 24.1

Условие прочности на сдвиг:

$$\tau_с = \frac{Q}{A_с} \leqslant [\tau_с]; \quad Q = \frac{F}{z};$$

$$\tau_с = \frac{F}{zA_с} \leqslant [\tau_с],$$

где $A_с = \pi r^2$;
z — количество заклепок.

Откуда $z \geqslant \dfrac{F}{A_с[\tau_с]}$; $z = \dfrac{120 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 100} = 5{,}97 \approx 6.$

Таким образом, необходимо 6 заклепок.

2. Определить количество заклепок из расчета на смятие.

Условие прочности на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{F'}{A_{см}} \leqslant [\sigma_{см}]; \quad F' = \frac{F}{z}; \quad z \geqslant \frac{F}{A_{см}[\sigma_{см}]},$$

$A_{см} = d\delta_{\min}$; F' — нагрузка на одну заклепку.

$$\text{Откуда} \quad z \geqslant \frac{120 \cdot 10^3}{8 \cdot 16 \cdot 300} = 3{,}12.$$

Таким образом, необходимо 4 заклепки.

Для обеспечения прочности на сдвиг (срез) и смятие необходимо 6 заклепок.

Для удобства установки заклепок расстояние между ними и от края листа регламентируется. Шаг в ряду (расстояние между центрами) заклепок $3d$; расстояние до края $1{,}5d$. Следовательно, для расположения шести заклепок диаметром 16 мм необходима ширина листа 288 мм. Округляем величину до 300 мм ($b = 300$ мм).

3. Проверим прочность листов на растяжение. Проверяем тонкий лист. Отверстия под заклепки ослабляют сечение, рассчитываем площадь листа в месте, ослабленном отверстиями (рис. 24.2):

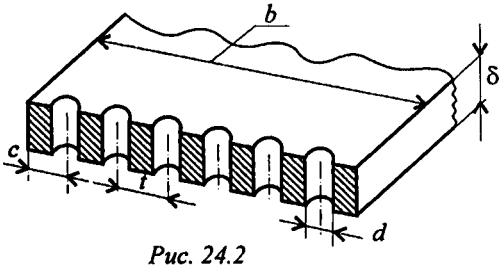


Рис. 24.2

$$A = (b - zd)\delta = (300 - 6 \cdot 16) \cdot 8 = 1632\,\text{мм}^2.$$

Условие прочности на растяжение:

$$\sigma_\text{р} = N/A \leqslant [\sigma_\text{р}]; \quad \sigma_\text{р} = \frac{120 \cdot 10^3}{1632} = 73{,}53\,\text{МПа}.$$

73,53 МПа < 160 МПа. Следовательно, прочность листа обеспечена.

Пример 2. Проверить прочность заклепочного соединения на срез и смятие. Нагрузка на соединение 60 кН, $[\tau_\text{с}] = 100$ МПа; $[\sigma_\text{см}] = 240$ МПа.

Решение

1. Соединение двухсрезными заклепками последовательно воспринимается тремя заклепками в левом ряду, а затем тремя заклепками в правом ряду (рис. 24.3).

Площадь сдвига каждой заклепки $A_\text{с} = 2\pi r^2$.

Площадь смятия боковой поверхности $A_\text{см} = d\delta_\text{min}$.

2. Проверим прочность соединения на сдвиг (срез).

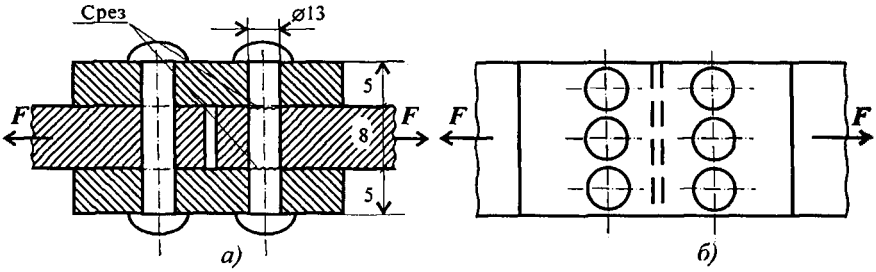


Рис. 24.3

$Q = F/z$ — поперечная сила в поперечном сечении заклепки:

$$\tau_c = \frac{F}{zA_c}; \quad \tau_c = \frac{60 \cdot 10^3}{3 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}5^2} = 75{,}4\,\text{МПа} < 100\,\text{МПа}.$$

Прочность на сдвиг обеспечена.

3. Проверим прочность соединения на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{zA_{см}}; \quad \sigma_{см} = \frac{60 \cdot 10^3}{3 \cdot 13 \cdot 8} = 192{,}3\,\text{МПа} < 240\,\text{МПа}.$$

Прочность заклепочного соединения обеспечена.

Пример 3. Проверить прочность сварного соединения угловыми швами с накладкой. Действующая нагрузка 60 кН, допускаемое напряжение металла шва на сдвиг 80 МПа.

Решение

1. Нагрузка передается последовательно через два шва слева, а далее — два шва справа (рис. 24.4). Разрушение угловых швов происходит по площадкам, расположенным под углом 45° к поверхности соединяемых листов.

2. Проверим прочность сварного соединения на срез.

Двухсторонний угловой шов можно рассчитать по формуле

$$\tau_c = \frac{Q}{A_c} \leqslant [\tau_c],$$

где $Q = F$; $A_c = 2 \cdot 0{,}7\,Kb$, A_c — расчетная площадь среза шва; K — катет шва, равен толщине накладки; b — длина шва.

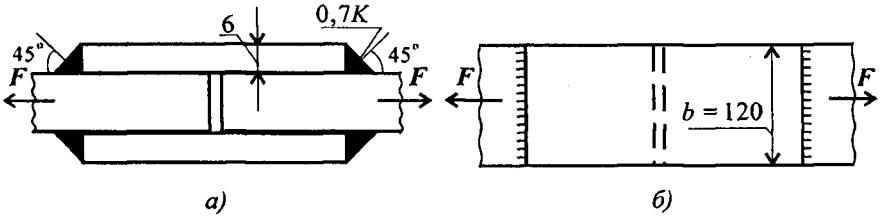


Рис. 24.4

Следовательно,

$$\tau_c = \frac{60 \cdot 10^3}{2 \cdot 0{,}7 \cdot 6 \cdot 120} = 59{,}5\,\text{МПа},$$

59,5 МПа < 80 МПа. Расчетное напряжение меньше допускаемого, прочность обеспечена.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие внутренние силовые факторы возникают при сдвиге и смятии?

2. Сформулируйте закон парности касательных напряжений.

3. Как обозначается деформация при сдвиге?

4. Запишите закон Гука при сдвиге.

5. Какой физический смысл у модуля упругости?

6. Укажите единицы измерения напряжений сдвига и смятия и модуля упругости.

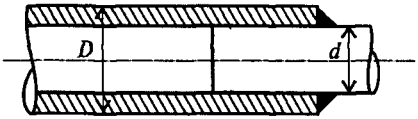
7. Как учесть количество деталей, использованных для передачи нагрузки при расчетах на сдвиг и смятие?

8. Запишите условия прочности на сдвиг и смятие.

9. Почему при расчете на смятие цилиндрических деталей вместо боковой цилиндрической поверхности подставляют плоскость, проходящую через диаметр?

10. Чем отличается расчет на прочность при сдвиге односрезной заклепки от двухсрезной?

11. Запишите формулу для расчета сварного соединения. Стержни круглого поперечного сечения сварены угловым швом (рис. 24.5).

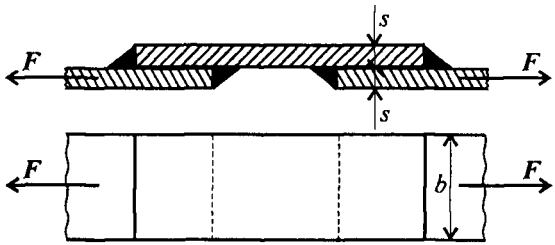


$$K = \frac{D - d}{2}.$$

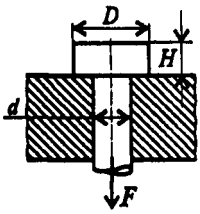
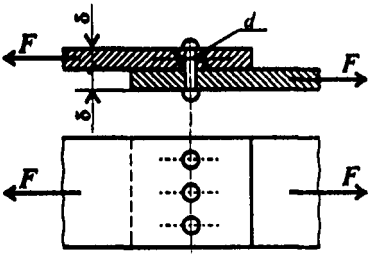
Рис. 24.5

12. Ответьте на вопросы тестового задания.

Тема 2.3. Практические расчеты на срез и смятие

Вопросы	Ответы	Код
1. Сварное соединение выполнено угловыми швами с накладкой. $s = 10$ мм; $b = 120$ мм. Рассчитать суммарную площадь среза сварных швов при передаче силы F. 	420 мм^2	1
	600 мм^2	2
	840 мм^2	3
	1680 мм^2	4
2. Выбрать формулу для расчета сварного соединения, изображенного на рисунке к вопросу 1, на прочность под действием внешней силы.	$\tau = \frac{Q}{A}$	1
	$\sigma = \frac{F}{A}$; $F = Q$	2
	$\tau = \frac{M}{W}$	3
	$\sigma = \frac{N}{A}$	4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
3. Болт нагружен растягивающей силой, при этом возникает смятие головки болта. Рассчитать величину площади смятия болта при действии силы F, если $d = 20$ мм; $H = 14$ мм; $D = 36$ мм. 	468 мм^2	1
	224 мм^2	2
	1331 мм^2	3
	703 мм^2	4
4. Из условия прочности болта на смятие определить величину допускаемой нагрузки F, если $[\tau_c] = 100$ МПа, $[\sigma_{см}] = 240$ МПа, использовать для расчета данные вопроса 3.	22,40 кН	1
	84,3 кН	2
	168,7 кН	3
	70,3 кН	4
5. Проверить прочность заклепочного соединения на срез, если $F = 80$ кН; $[\tau_c] = 100$ МПа; $[\sigma_{см}] = 240$ МПа; $d = 17$ мм; $\delta = 50$ мм; $z = 3$. $[\tau_c]$, $[\sigma_{см}]$ — допускаемые напряжения. 	$\tau < [\tau_c]$	1
	$\tau = [\tau_c]$	2
	$\tau > [\tau_c]$	3
	Данных недостаточно	4

ЛЕКЦИЯ 25

Тема 2.4. Геометрические характеристики плоских сечений

Иметь представление о физическом смысле и порядке определения осевых, центробежных и полярных моментов инерции, о главных центральных осях и главных центральных моментах инерции.

Знать формулы моментов инерции простейших сечений, способы вычисления моментов инерции при параллельном переносе осей.

При растяжении, сжатии, смятии и сдвиге деталь сопротивляется деформации всем сечением одинаково. Здесь геометрической характеристикой сечения является площадь.

При кручении и изгибе сечение сопротивляется деформации не одинаково, при расчетах напряжений появляются другие геометрические характеристики сечения, влияющие на сопротивления сечения деформированию.

Статический момент площади сечения

Рассмотрим произвольное сечение (рис. 25.1).

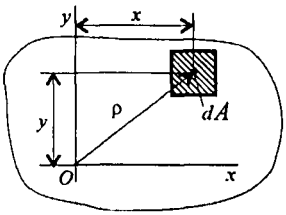


Рис. 25.1

Если разбить сечение на бесконечно малые площадки dA и умножить каждую площадку на расстояние до оси координат и проинтегрировать полученное выражение, получим статический момент площади сечения:

1) относительно оси Ox $S_x = \int\limits_A y\,dA$;

2) относительно оси Oy $S_y = \int\limits_A x\,dA$.

Для симметричного сечения статические моменты каждой половины площади равны по величине и имеют разный знак. Следовательно, *статический момент относительно оси симметрии равен нулю.*

Статический момент используется при определении положения

центра тяжести сечения:

$$x_C = \frac{\sum\limits_0^n A_k x_k}{\sum\limits_0^n A_k}; \quad y_C = \frac{\sum\limits_0^n A_k y_k}{\sum\limits_0^n A_k}; \quad \sum_0^n A_k y_k \approx \int\limits_A y\,dA.$$

Формулы для определения положения центра тяжести можно записать в виде

$$x_C = \frac{S_y}{A}; \quad y_C = \frac{S_x}{A}.$$

Центробежный момент инерции

Центробежным моментом инерции сечения называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на обе координаты:

$$\mathcal{J}_{xy} = \int\limits_A xy\,dA.$$

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Центробежный момент инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести сечения, равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент равен нулю, называются главными. Главные оси, проходящие через центр тяжести, называют *главными центральными осями сечения.*

Осевые моменты инерции

Осевым моментом инерции сечения относительно некоторой оси, лежащей в этой же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояния до этой оси:

1) осевой момент инерции сечения относительно оси Ox
$\mathcal{J}_x = \int\limits_A y^2\,dA$;

2) осевой момент инерции сечения относительно оси Oy
$\mathcal{J}_y = \int\limits_A x^2\,dA$.

Полярный момент инерции сечения

Полярным моментом инерции сечения относительно некоторой точки (полюса) называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояния до этой точки:

$$\mathcal{J}_p = \int\limits_A \rho^2\, dA,$$

где ρ — расстояние до полюса (центра поворота) (рис. 25.1).

Поскольку $\rho^2 = x^2 + y^2$, получим: *полярный момент инерции сечения равен сумме осевых*:

$$\mathcal{J}_p = \mathcal{J}_x + \mathcal{J}_y.$$

Осевые моменты инерции характеризуют сопротивление сечения повороту относительно соответствующей оси.

Полярный момент инерция характеризует сопротивление сечения повороту вокруг полюса (начала координат). Единицы измерения моментов инерции: м^4; см^4; мм^4.

Моменты инерции простейших сечений

Осевые моменты инерции прямоугольника (рис. 25.2)

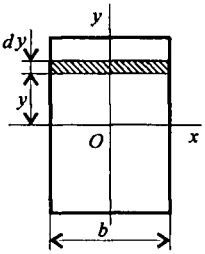


Рис. 25.2

Представим прямоугольник высотой h и шириной b в виде сечения, составленного из бесконечно тонких полос. Запишем площадь такой полосы $bdy = dA$. Подставим в формулу осевого момента инерции относительно оси Ox:

$$\mathcal{J}_x = \int\limits_A by^2\, dy = b\int\limits_A y^2\, dy;$$

$$\mathcal{J}_x = b\int\limits_{-h/2}^{h/2} y^2\, dy = \frac{2bh^3}{2^3\cdot 3};\ \text{получим: } \mathcal{J}_x = \frac{bh^3}{12}.$$

По аналогии, если разбить прямоугольник на вертикальные полосы, рассчитать площади полос и подставить в формулу для осевого момента инерции относительно оси Oy, получим:

$$\mathcal{J}_y = \int\limits_A x^2\,dA = \frac{hb^3}{12}.$$

Очевидно, что при $h > b$ сопротивление повороту относительно оси Ox больше, чем относительно Oy.

Для квадрата: $h = b$; $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \dfrac{h^4}{12}$.

Полярный момент инерции круга

Для круга вначале вычисляют полярный момент инерции, затем — осевые.

Представим круг в виде совокупности бесконечно тонких колец (рис. 25.3).

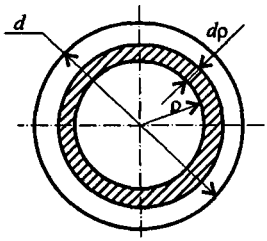


Рис. 25.3

Площадь каждого кольца можно рассчитать как площадь прямоугольника с длинной стороной, равной длине соответствующей окружности, и высотой, равной толщине кольца: $dA = 2\pi\rho\,d\rho$.

Подставим это выражение для площади в формулу для полярного момента инерции:

$$\mathcal{J}_p = \int\limits_A \rho^2 2\pi\rho\,d\rho = 2\pi\int\limits_0^{d/2} \rho^3\,d\rho; \quad \mathcal{J}_p = \frac{2\pi d^4}{4\cdot 2^4} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Получим формулу для расчета полярного момента инерции круга:

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Подобным же образом можно получить формулу для расчета полярного момента инерции кольца:

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi}{32}(d^4 - d_{\text{вн}}^4),$$

где d — наружный диаметр кольца; $d_{\text{вн}}$ — внутренний диаметр кольца.

Если обозначить $d_{\text{вн}}/d = c$, то

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi d^4}{32}(1 - c^4).$$

Осевые моменты инерции круга и кольца

Используя известную связь между осевыми и полярным моментами инерции, получим:

$$\mathcal{J}_p = \mathcal{J}_x + \mathcal{J}_y; \quad \mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \frac{\mathcal{J}_p}{2};$$

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \frac{\pi d^4}{64} \text{ (круг)}; \quad \mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \frac{\pi d^4}{64}(1 - c^4) \text{ (кольцо)}.$$

Моменты инерции относительно параллельных осей

Оси Ox_0 и Ox параллельны (рис. 25.4).

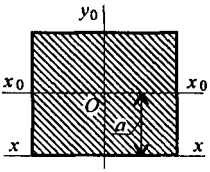


Рис. 25.4

При параллельном переносе прямоугольной системы осей y_0Ox_0 в новое положение y_0Ox значения моментов инерции $\mathcal{J}_x$, $\mathcal{J}_y$, $\mathcal{J}_{xy}$ заданного сечения меняются. Задается формула перехода без вывода.

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_{x_0} + Aa^2,$$

здесь $\mathcal{J}_x$ — момент инерции относительно оси Ox;

$\mathcal{J}_{x_0}$ — момент инерции относительно оси Ox_0;

A — площадь сечения;

a — расстояние между осями Ox и Ox_0.

Главные оси и главные моменты инерции

Главные оси — это оси, относительно которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения: минимальный и максимальный.

Главные центральные моменты инерции рассчитываются относительно главных осей, проходящих через центр тяжести.

Примеры решения задач

Пример 1. Определить величину осевых моментов инерции плоской фигуры относительно осей Ox и Oy (рис. 25.5).

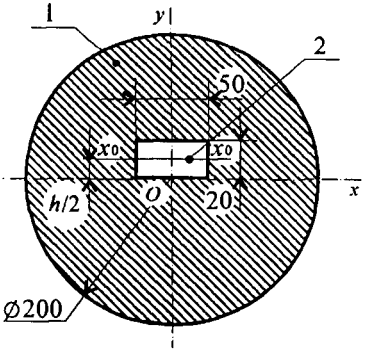


Рис. 25.5

Решение

1. Определим осевой момент инерции относительно оси Ox. Используем формулы для главных центральных моментов. Представим момент инерции сечения как разность моментов инерции круга и прямоугольника.

Для круга $\mathcal{J}_{x_1} = \dfrac{\pi d^4}{64}$.

Для прямоугольника $\mathcal{J}_{x_{02}} = \dfrac{bh^3}{12}$.

Для прямоугольника ось Ox не проходит через ЦТ.

Момент инерции прямоугольника относительно оси Ox:

$$\mathcal{J}_{x_2} = \mathcal{J}_{x_{02}} + a^2 A,$$

где A — площадь сечения; a — расстояние между осями Ox и Ox_0.

$$\mathcal{J}_{x_2} = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}.$$

Момент инерции сечения

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_{x_1} - \mathcal{J}_{x_2}, \quad \mathcal{J}_x = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bh^3}{3};$$

$$\mathcal{J}_x = \frac{3{,}14 \cdot 2^4 \cdot 10^8}{64} - \frac{50 \cdot 2^3 \cdot 10^3}{3} = 783{,}7 \cdot 10^5\,\text{мм}^4; \quad \mathcal{J}_x = 7837\,\text{см}^4.$$

2. Осевой момент инерции относительно оси Oy:

$$\mathcal{J}_{y_1} = \mathcal{J}_{x_1} = \frac{\pi d^4}{64} \text{ — круг}; \quad \mathcal{J}_{y_2} = \frac{hb^3}{12} \text{ — прямоугольник.}$$

Момент инерции сечения

$$\mathcal{J}_y = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{h \cdot b^3}{12}; \quad \mathcal{J}_y = \frac{3{,}14 \cdot 200^4}{64} - \frac{20 \cdot 50^3}{12} = 760 \cdot 10^5\,\text{мм}^4;$$

$$\mathcal{J}_y = 7600\,\text{см}^4.$$

Пример 2. Найти главный центральный момент инерции сечения относительно оси Ox (рис. 25.6).

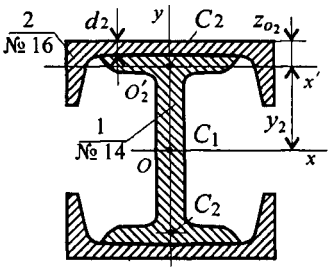


Рис. 25.6

Решение

1. Сечение составлено из стандартных профилей, главные центральные моменты инерции которых приводятся в таблицах ГОСТ, см. Приложение 1.
Для двутавра № 14 по ГОСТ 8239–89 $\mathcal{J}_{Ox_1} = 572\,\text{см}^4$.
Для швеллера № 16 по ГОСТ 8240–89 $\mathcal{J}_{Ox_2} = 757\,\text{см}^4$.
Площадь $A_2 = 18{,}1\,\text{см}^2$, $\mathcal{J}_{Oy_2} = 63{,}3\,\text{см}^4$

2. Определяем координату центра тяжести швеллера относительно оси Ox. В заданном сечении швеллер повернут и поднят. При этом главные центральные оси поменялись местами.
$y_2 = (h_1/2) + d_2 - z_{O_2}$; по ГОСТ находим $h_1 = 14$ см; $d_2 = 5$ мм; $z_O = 1{,}8$ см.

3. Момент инерции сечения равен сумме моментов инерции швеллеров и двутавра относительно оси Ox. Используем формулу моментов инерции относительно параллельных осей:

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_{Ox_1} + 2(\mathcal{J}'_{Ox_2} + y_2^2 A).$$

В данном случае $\mathcal{J}'_{Ox_2} = \mathcal{J}_{Oy_2} = 63{,}3\,\text{см}^4$;
$y_2 = (14/2) + 0{,}5 - 1{,}8 = 5{,}7$ см (расстояние между осями координат Ox' и Ox);

$$\mathcal{J}_x = 572 + 2(63{,}3 + 5{,}7^2 \cdot 18{,}1) = 1874{,}7\,\text{см}^4.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Диаметр сплошного вала увеличили в 2 раза. Во сколько раз увеличатся осевые моменты инерции? ($\mathcal{J}_x = \dfrac{\pi d^4}{32}$.)

2. Осевые моменты сечения равны соответственно $\mathcal{J}_x = 2{,}5$ мм и $\mathcal{J}_y = 6{,}5$ мм. Определите полярный момент сечения.

3. Осевой момент инерции кольца относительно оси Ox $\mathcal{J}_x = 4\,\text{см}^4$. Определите величину $\mathcal{J}_p$.

4. В каком случае J_x наименьшее (рис. 25.7)?

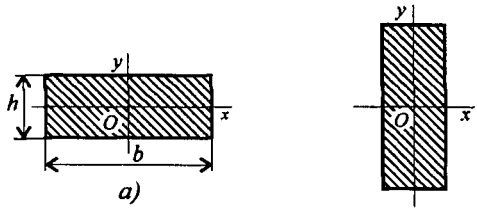


Рис. 25.7

5. Какая из приведенных формул для определения J_x подойдет для сечения, изображенного на рис. 25.8?

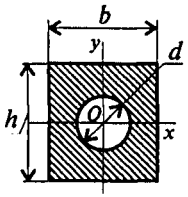


Рис. 25.8

Варианты ответа:

1. $\dfrac{bh^3}{12} + \dfrac{bh^3}{4}$.
2. $\dfrac{bh^3}{12} - \dfrac{\pi d^4}{64}$;
3. $\dfrac{bh^3}{12} + \dfrac{\pi d^4}{32}$;
4. $\dfrac{\pi d^4}{32} - \dfrac{bh^3}{12}$.

6. Момент инерции швеллера № 10 относительно главной центральной оси $J_{x_0} = 174\,\text{см}^4$; площадь поперечного сечения 10,9 см^2.

Определите осевой момент инерции относительно оси, проходящей через основание швеллера (рис. 25.9).

7. Сравнить полярные моменты инерции двух сечений, имеющих практически одинаковые площади (рис. 25.10).

8. Сравнить осевые моменты инерции относительно оси Ox прямоугольника и квадрата, имеющих одинаковые площади (рис. 25.11).

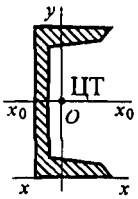


Рис. 25.9

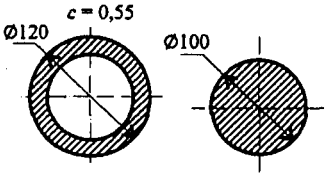


Рис. 25.10

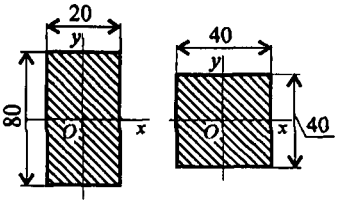


Рис. 25.11

ЛЕКЦИЯ 26

Тема 2.5. Кручение. Внутренние силовые факторы при кручении. Построение эпюр крутящих моментов

Иметь представление о деформациях при кручении, о внутренних силовых факторах при кручении.

Уметь строить эпюры крутящих моментов.

Деформации при кручении

Кручение круглого бруса происходит при нагружении его парами сил с моментами в плоскостях, перпендикулярных продольной оси. При этом образующие бруса искривляются и разворачиваются на угол γ, называемый *углом сдвига* (угол поворота образующей). Поперечные сечения разворачиваются на угол φ, называемый *углом закручивания* (угол поворота сечения, рис. 26.1).

Длина бруса и размеры поперечного сечения при кручении не изменяются.

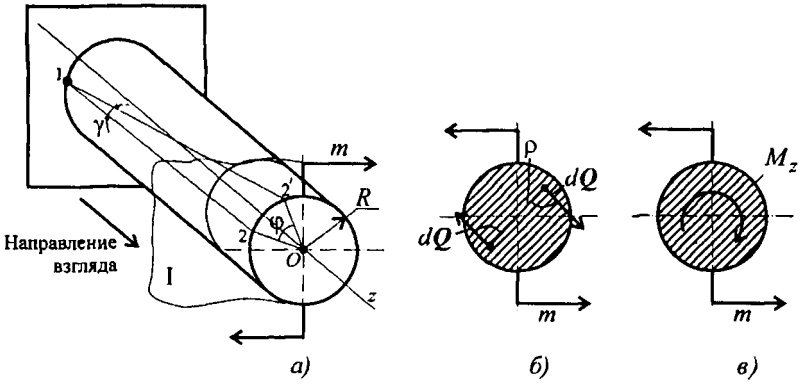


Рис. 26.1

Связь между угловыми деформациями определяется соотношением

$$\frac{\varphi}{\gamma} = \frac{l}{R};$$

l — длина бруса; R — радиус сечения.

Длина бруса значительно больше радиуса сечения, следовательно, $\varphi \gg \gamma$.

Угловые деформации при кручении рассчитываются в радианах.

Гипотезы при кручении

1. Выполняется гипотеза плоских сечений: поперечное сечение бруса, плоское и перпендикулярное продольной оси, после деформации остается плоским и перпендикулярным продольной оси.

2. Радиус, проведенный из центра поперечного сечения бруса, после деформации остается прямой линией (не искривляется).

3. Расстояние между поперечными сечениями после деформации не меняется. Ось бруса не искривляется, диаметры поперечных сечений не меняются.

Внутренние силовые факторы при кручении

Кручением называется нагружение, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор — крутящий момент.

Внешними нагрузками также являются две противоположно направленные пары сил.

Рассмотрим внутренние силовые факторы при кручении круглого бруса (рис. 26.1).

Для этого рассечем брус плоскостью I и рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. 26.1а). Сечение рассматриваем со стороны отброшенной части.

Внешний момент пары сил разворачивает участок бруса против часовой стрелки, внутренние силы упругости сопротивляются повороту. В каждой точке сечения возникает поперечная сила dQ (рис. 26.1б). Каждая точка сечения имеет симметричную, где возникает поперечная сила, направленная в обратную сторону. Эти силы образуют пару с моментом $dm = \rho\, dQ$; ρ — расстояние от точки

до центра сечения. Сумма поперечных сил в сечении равна нулю: $\sum dQ = 0$.

С помощью интегрирования получим суммарный момент сил упругости, называемый крутящим моментом:

$$M_к = \int\limits_A dm = \int\limits_A \rho\, dQ.$$

Практически крутящий момент определяется из условия равновесия отсеченной части бруса.

Крутящий момент в сечении равен сумме моментов внешних сил, действующих на отсеченную часть (рис. 26.1в):

$\sum m_z = 0$, т. е. $-m + M_z = 0$; $M_z = m = M_к$.

Эпюры крутящих моментов

Крутящие моменты могут меняться вдоль оси бруса. После определения величин моментов по сечениям строим график-эпюру крутящих моментов вдоль оси бруса.

Крутящий момент считаем положительным, если *моменты внешних пар сил* направлены *по часовой стрелке*, в этом случае момент внутренних сил упругости направлен против часовой стрелки (рис. 26.2).

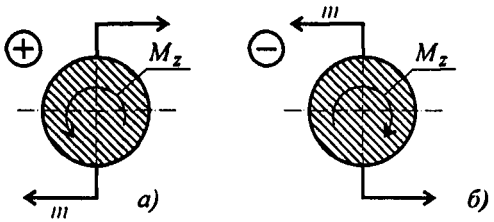


Рис. 26.2

Порядок построения эпюры моментов аналогичен построению эпюр продольных сил. Ось эпюры параллельна оси бруса, значения моментов откладывают от оси вверх или вниз, масштаб построения выдерживать обязательно.

Примеры решения задач

Пример 1. На распределительном валу (рис. 26.3) установлены четыре шкива, на вал через шкив 1 подается мощность 12 кВт, которая через шкивы 2, 3, 4 передается потребителю; мощности распределяются следующим образом: $P_2 = 8$ кВт, $P_3 = 3$ кВт, $P_4 = 1$ кВт,

вал вращается с постоянной скоростью $\omega = 25$ рад/с. Построить эпюру крутящих моментов на валу.

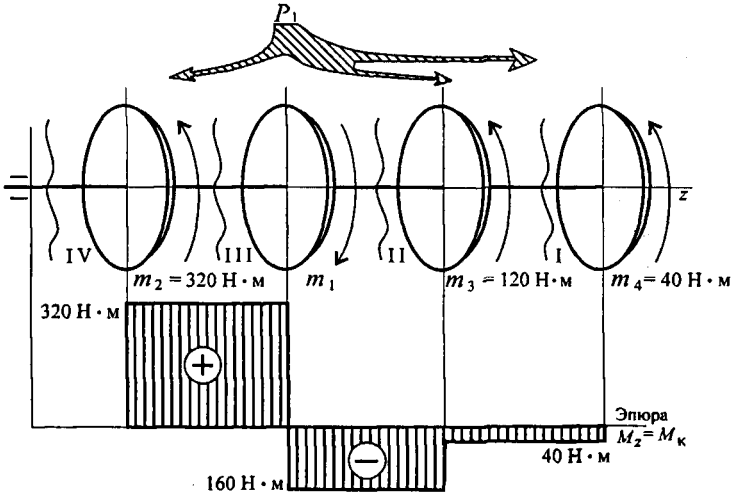


Рис. 26.3

Решение

1. Определяем моменты пар сил на шкивах.

Вращающий момент определяем из формулы мощности при вращательном движении $P = m\omega$, $m = \dfrac{P}{\omega}$.

Момент на шкиве 1 движущий, а моменты на шкивах 2, 3, 4 — моменты сопротивления механизмов, поэтому они имеют противоположное направление. Брус скручивается между движущим моментом и моментами сопротивления. При равновесии момент движущий равен сумме моментов сопротивления:

$$m_1 = \frac{12 \cdot 10^3}{25} = 480\,\text{Н} \cdot \text{м}; \qquad m_2 = \frac{8 \cdot 10^3}{25} = 320\,\text{Н} \cdot \text{м};$$

$$m_3 = \frac{3 \cdot 10^3}{25} = 120\,\text{Н} \cdot \text{м}; \qquad m_4 = \frac{1 \cdot 10^3}{25} = 40\,\text{Н} \cdot \text{м};$$

$$m_1 = m_2 + m_3 + m_4; \qquad m_1 = 320 + 120 + 40 = 480\,\text{Н} \cdot \text{м}.$$

2. Определяем крутящие моменты в поперечных сечениях бруса с помощью метода сечений.

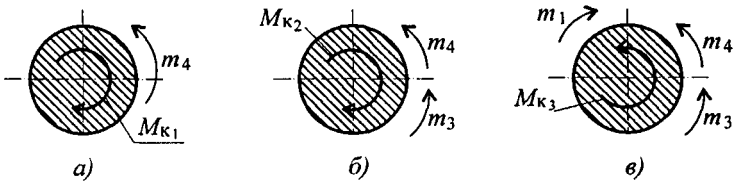


Рис. 26.4

Сечение I (рис. 26.4а):

$-m_4 + M_{к_1} = 0$; $M_{к_1} = m_4$; $M_{к_1} = 40\,\text{Н}\cdot\text{м}$ — крутящий момент отрицательный.

Сечение II (рис. 26.4б):

$-m_4 - m_3 + M_{к_2} = 0$; $M_{к_2} = m_4 + m_3$; $M_{к_2} = 40 + 120 = 160\,\text{Н}\cdot\text{м}$ — крутящий момент отрицательный.

Сечение III (рис. 26.4в):

$-m_4 - m_3 + m_1 - M_{к_3} = 0$; $-M_{к_3} = m_4 + m_3 - m_1$; $-M_{к_3} = 40 + 120 - 480$; $M_{к_3} = 320\,\text{Н}\cdot\text{м}$ — крутящий момент положительный.

Сечение IV:

$M_{к_4} = -m_4 - m_3 + m_1 - m_2 = 0$.

3. Строим эпюру крутящих моментов. Заметим, что *скачок на эпюре всегда численно равен приложенному вращающему момент*

Выбираем соответствующий масштаб.

Откладываем значения моментов, штрихуем эпюру поперек, об водим по контуру, записываем значения моментов (см. эпюру под схемой вала (рис. 26.3)). Максимальный крутящий момент на участ ке III $M_{к_3} = 320\,\text{Н}\cdot\text{м}$.

Пример 2. Выбрать рациональное расположение колес на вал (рис. 26.5). $m_1 = 280\,\text{Н}\cdot\text{м}$; $m_2 = 140\,\text{Н}\cdot\text{м}$; $m_3 = 80\,\text{Н}\cdot\text{м}$.

Примечание. Меняя местами колеса (шкивы) на валу можно изменять величины крутящих моментов. Рациональным расположением является такое, при котором крутящие моменты принимают минимальные из возможных значения.

$$m_0 = m_1 + m_2 + m_3 = 280 + 140 + 80 = 500\,\text{Н}\cdot\text{м}.$$

Рассмотрим нагрузки на валу при различном расположении колес.

Из представленных вариантов наиболее рационально расположение шкивов в третьем случае, здесь значения крутящих моментов минимальны. Вывод: при установке шкивов желательно, чтобы мощность подавалась в середине вала и по возможности равномерно распределялась направо и налево.

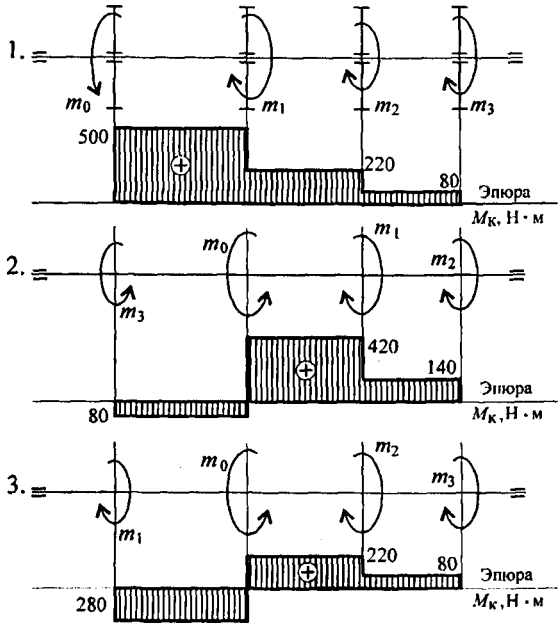


Рис. 26.5

Первый вариант: $M_к^{max} = 500$ Н · м.
Второй вариант: $M_к^{max} = 420$ Н · м.
Третий вариант: $M_к^{max} = 280$ Н · м.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие деформации возникают при кручении?
2. Какие гипотезы выполняются при деформации кручения?
3. Изменяются ли длина и диаметр вала после скручивания?

4. Какие внутренние силовые факторы возникают при кручении?

5. Что такое рациональное расположение колес на валу?

6. Для заданного вала (рис. 26.6) выбрать соответствующую эпюру крутящих моментов (а, б, в). $m_1 = 40\,\text{Н}\cdot\text{м}$; $m_2 = 180\,\text{Н}\cdot\text{м}$; $m_0 = 280\,\text{Н}\cdot\text{м}$.

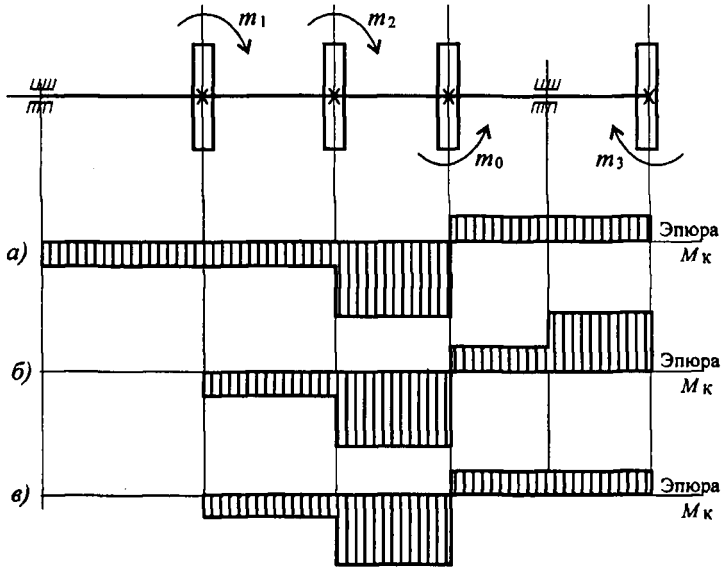


Рис. 26.6

7. В каком порядке рациональнее расположить шкивы на валу для уменьшения нагрузки на вал (рис. 26.7)?

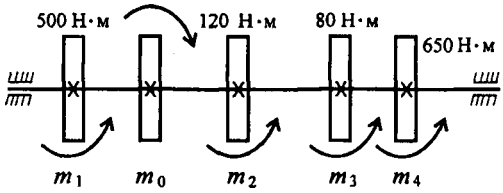


Рис. 26.7

Варианты ответов:

1. m_0; m_1; m_2; m_3; m_4.
2. m_2; m_3; m_0; m_4; m_1.
3. m_3; m_4; m_0; m_1; m_2.
4. m_4; m_3; m_0; m_1; m_2.

ЛЕКЦИЯ 27

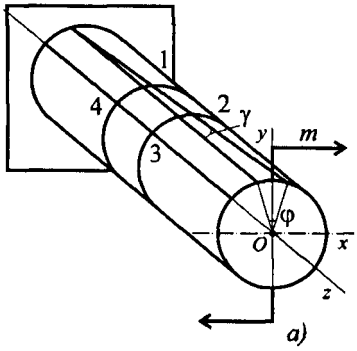
Тема 2.5. Кручение. Напряжения и деформации при кручении

Иметь представление о напряжении и деформациях при кручении, о моменте сопротивления при кручении.

Знать формулы для расчета напряжений в точке поперечного сечения, закон Гука при кручении.

Напряжения при кручении

Проводим на поверхности бруса сетку из продольных и поперечных линий и рассмотрим рисунок, образовавшийся на поверхности после деформации (рис. 27.1а). Поперечные окружности, оставаясь плоскими, поворачиваются на угол φ, продольные линии искривляются, прямоугольники превращаются в параллелограммы. Рассмотрим элемент бруса 1234 после деформации.



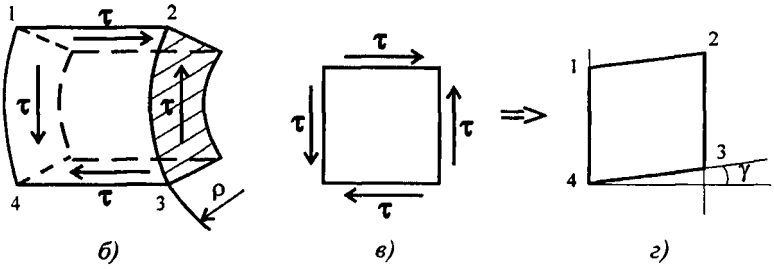


Рис. 27.1

При выводе формул используем закон Гука при сдвиге и гипоте-

зу плоских сечений и неискривления радиусов поперечных сечений

При кручении возникает напряженное состояние, называемое «чистый сдвиг» (рис. 27.1б).

При сдвиге на боковой поверхности элемента 1234 возникают касательные напряжения, равные по величине (рис. 27.1в), элемент деформируется (рис. 27.1г).

Материал подчиняется закону Гука. Касательное напряжение пропорционально углу сдвига.

Закон Гука при сдвиге $\tau = G\gamma$,
G — модуль упругости при сдвиге, Н/мм^2; γ — угол сдвига, рад.

Напряжение в любой точке поперечного сечения

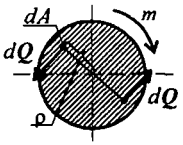


Рис. 27.2

Рассмотрим поперечное сечение круглого бруса. Под действием внешнего момента в каждой точке поперечного сечения возникают силы упругости dQ (рис. 27.2).

$$dQ = \tau\, dA,$$

где τ — касательное напряжение; dA — элементарная площадка.

В силу симметрии сечения силы dQ образуют пары (см. лекцию 26).

Элементарный момент силы dQ относительно центра круга

$$dm = \rho\, dQ,$$

где ρ — расстояние от точки до центра круга.

Суммарный момент сил упругости получаем сложением (интегрированием) элементарных моментов:

$$M_{\text{к}} = \int\limits_A dm = \int\limits_A \rho\, dQ = \int\limits_A \tau\rho\, dA.$$

После преобразования получим формулу для определения напряжений в точке поперечного сечения:

$$\tau_{\text{к}} = \frac{M_{\text{к}}\rho}{\mathcal{J}_p}, \quad \text{где} \quad \mathcal{J}_p = \int\limits_A \rho^2\, dA.$$

При $\rho = 0$ $\tau_к = 0$; касательное напряжение при кручении пропорционально расстоянию от точки до центра сечения. Полученный интеграл $\mathcal{J}_p$ (лекция 25) называется полярным моментом инерции сечения. $\mathcal{J}_p$ является геометрической характеристикой сечения при кручении. Она характеризует сопротивление сечения скручиванию.

Анализ полученной формулы для $\mathcal{J}_p$ показывает, что слои, расположенные дальше от центра, испытывают большие напряжения.

Эпюра распределения касательных напряжений при кручении (рис. 27.3)

$M_к$ — крутящий момент в сечении;

ρ_B — расстояние от точки B до центра;

τ_B — напряжение в точке B;

$\tau_к^{max}$ — максимальное напряжение.

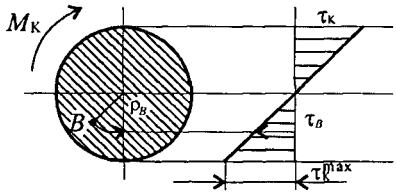


Рис. 27.3

Максимальные напряжения при кручении

Из формулы для определения напряжений и эпюры распределения касательных напряжений при кручении видно, что максимальные напряжения возникают на поверхности.

Определим максимальное напряжение, учитывая, что $\rho_{max} = d/2$, где d — диаметр бруса круглого сечения.

Для круглого сечения полярный момент инерции рассчитывается по формуле (см. лекцию 25).

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Максимальное напряжение возникает на поверхности, поэтому имеем

$$\tau_к^{max} = \frac{M_к d/2}{\mathcal{J}_p}.$$

Обычно $\mathcal{J}_p/\rho_{max}$ обозначают W_p и называют *моментом сопротивления* при кручении, или *полярным моментом сопротивления* сечения

$$W_p = \frac{\mathcal{J}_p}{\rho_{max}}.$$

Таким образом, для расчета *максимального напряжения на поверхности* круглого бруса получаем формулу

$$\tau_{\text{к}}^{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p}.$$

Для круглого сечения $W_p = \dfrac{\pi d^4 2}{32d} = \dfrac{\pi d^3}{16}$; $\quad W_p \approx 0{,}2d^3$.

Для кольцевого сечения $W_p = \dfrac{\pi d^3}{16}(1 - c^4)$, где $c = \dfrac{d_{\text{вн}}}{d}$.

Условие прочности при кручении

Разрушение бруса при кручении происходит с поверхности, при расчете на прочность используют условие прочности

$$\tau_{\text{к}}^{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p} \leqslant [\tau_{\text{к}}],$$

где $[\tau_{\text{к}}]$ — допускаемое напряжение кручения.

Виды расчетов на прочность

Существует три вида расчетов на прочность:

1. ***Проектировочный расчет*** — определяется диаметр бруса (вала) в *опасном сечении*:

$$\tau_{\text{к}} = \frac{M_{\text{к}}}{0{,}2d^3} \leqslant [\tau_{\text{к}}].$$

Откуда

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{M_{\text{к}}}{0{,}2[\tau_{\text{к}}]}}.$$

2. ***Проверочный расчет*** — проверяется выполнение условия прочности

$$\tau_{\text{к}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p} \leqslant [\tau_{\text{к}}].$$

3. ***Определение нагрузочной способности*** (максимального крутящего момента)

$$[M_{\text{к}}] = [\tau_{\text{к}}]W_p.$$

Расчет на жесткость

При расчете на жесткость определяется деформация и сравнивается с допускаемой. Рассмотрим деформацию круглого бруса над действием внешней пары сил с моментом m (рис. 27.4).

При кручении деформация оценивается углом закручивания:

$$\frac{\varphi}{\gamma} = \frac{l}{R} \quad \text{(см. лекцию 26).}$$

Здесь φ — угол закручивания; γ — угол сдвига; l — длина бруса; R — радиус; $R = d/2$. Откуда

$$\gamma = \frac{\varphi R}{l}.$$

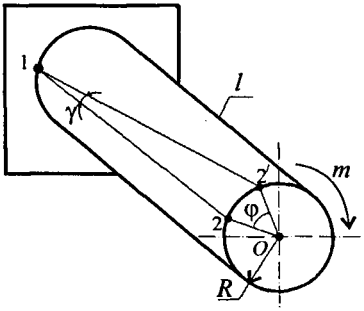


Рис. 27.4

Закон Гука имеет вид $\tau_к = G\gamma$.

Подставим выражение для γ, получим

$$\tau_к = G\frac{\varphi d/2}{l}; \text{ используем } \tau_к = \frac{M_к d/2}{J_p},$$

откуда

$$\varphi = \frac{\tau_к l}{Gd/2} = \frac{M_к l}{GJ_p}.$$

Произведение GJ_p называют жесткостью сечения.

Модуль упругости можно определить как $G \cong 0{,}4E$. Для стали $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа.

Обычно рассчитывается угол закручивания, приходящийся на один метр длины бруса (вала) φ_0.

Условие жесткости при кручении можно записать в виде

$$\varphi_0 = \frac{M_к}{GJ_p} \leqslant [\varphi_0],$$

где φ_0 — относительный угол закручивания, $\varphi_0 = \varphi/l$;

$[\varphi_0] \approx 1$ град/м $= 0{,}02$ рад/м — допускаемый относительный угол закручивания.

Примеры решения задач

Из расчетов на прочность и жесткость определить потребный диаметр вала для передачи мощности 63 кВт при скорость 30 рад/с. Материал вала — сталь, допускаемое напряжение при кручении 30 МПа; допускаемый относительный угол закручивания $[\varphi_0] = 0{,}02$ рад/м; модуль упругости при сдвиге $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа.

Решение

1. Определение размеров поперечного сечения из расчета на прочность.

Условие прочности при кручении:

$$\tau_{\text{к}}^{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p} \leqslant [\tau_{\text{к}}].$$

Определяем вращающий момент из формулы мощности при вращении:

$$M_{\text{вр}} = \frac{P}{\omega}\left[\frac{\text{Вт}}{\text{рад/с}}\right]; \quad M_{\text{вр}} = \frac{63 \cdot 10^3}{30} = 2{,}1 \cdot 10^3\,\text{Н} \cdot \text{м}; \quad M_{\text{вр}} = M_{\text{к}}.$$

Из условия прочности определяем момент сопротивления вала при кручении

$$W_p \geqslant M_{\text{к}}/[\tau_{\text{к}}].$$

Значения подставляем в ньютонах и мм.

$$W_p \geqslant \frac{2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{30} = 7 \cdot 10^4\,\text{мм}^3.$$

Определяем диаметр вала:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}; \quad d \geqslant \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi}}; \quad d \geqslant \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 7 \cdot 10^4}{3{,}14}} = 71\,\text{мм}.$$

2. Определение размеров поперечного сечения из расчета на жесткость.

Условие жесткости при кручении:

$$\varphi_0 = \frac{M_{\text{к}}}{G\mathcal{J}_p} \leqslant [\varphi_0].$$

Из условия жесткости определяем момент инерции сечения при кручении:

$$\mathcal{J}_p \geqslant \frac{M_к}{G[\varphi_0]}; \quad \mathcal{J}_p \geqslant \frac{2{,}1 \cdot 10^6}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}02 \cdot 10^{-3}}; \quad \mathcal{J}_p \geqslant 1312{,}5 \cdot 10^3\,\text{мм}^4.$$

Определяем диаметр вала:

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad d \geqslant \sqrt[4]{\frac{32\mathcal{J}_p}{\pi}}; \quad d \geqslant \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1312{,}5 \cdot 10^3}{3{,}14}} = 60{,}2\,\text{мм}.$$

3. Выбор потребного диаметра вала из расчетов на прочность и жесткость.

Для обеспечения прочности и жесткости одновременно из двух найденных значений выбираем большее.

Полученное значение следует округлить, используя ряд предпочтительных чисел. Практически округляем полученное значение так, чтобы число заканчивалось на 5 или 0. Принимаем значение $d_{вала} = 75$ мм.

Для определения диаметра вала желательно пользоваться стандартным рядом диаметров, приведенном в Приложении 2.

Контрольные вопросы и задания

1. Как называется напряженное состояние, возникающее при кручении круглого бруса (вала)?

2. Напишите закон Гука при сдвиге.

3. Чему равен модуль упругости материала при кручении для стали? В каких единицах он измеряется?

4. Какая связь между углом сдвига и углом закручивания?

5. Как распределяется касательное напряжение при кручении? Чему равно напряжение в центре круглого поперечного сечения?

6. Напишите формулу для расчета напряжения в любой точке поперечного сечения.

7. Что такое полярный момент инерции? Какой физический смысл имеет эта величина? В каких единицах измеряется?

Напишите формулу для расчета полярного момента инерции для круга.

8. Напишите формулу для расчета напряжения на поверхности вала при кручении. Как изменится напряжение, если диаметр вала увеличится в два раза?

9. Почему для деталей, работающих на кручение, выбирают круглое поперечное сечение?

10. В чем заключается расчет на прочность?

11. В чем заключается расчет на жесткость?

12. По величине допускаемых крутящих моментов сравнить несущую способность двух валов из одинакового материала, имеющих примерно одинаковую площадь поперечных сечений $c = 0{,}55$ (рис. 27.5). Сравнение провести по формуле $[M_к] = [\tau_к]W_p$.

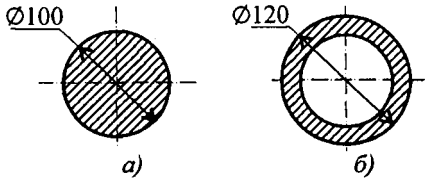
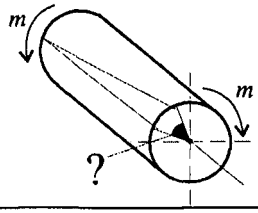


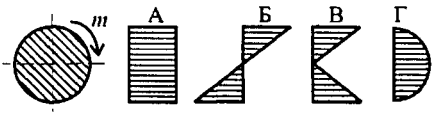
Рис. 27.5

13. Ответьте на вопросы тестового задания.

Тема 2.5. Кручение

Вопросы	Ответы	Код
1. Какими буквами принято обозначать деформацию при кручении? 	γ	1
	Δl	2
	φ	3
	δ	4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
2. Выбрать пропущенную величину в законе Гука при сдвиге $\tau = \square\,\gamma$	μ	1
	E	2
	G	3
	W_p	4
3. Как распределяется напряжение в поперечном сечении бруса при кручении? 	А	1
	Б	2
	В	3
	Г	4
4. Как изменится максимальное напряжение в сечении при кручении, если диаметр бруса уменьшится в 3 раза?	Уменьшится в 3 раза	1
	Уменьшится в 9 раз	2
	Увеличится в 9 раз	3
	Увеличится в 27 раз	4
5. Образец диаметром 40 мм разрушился при крутящем моменте 230 Н·м. Определить разрушающее напряжение.	6,75 МПа	1
	18 МПа	2
	21,25 МПа	3
	32,75 МПа	4

ЛЕКЦИЯ 28

Тема 2.5. Кручение. Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Иметь представление о рациональных формах поперечного сечения и рациональном расположении колес на валу.

Знать условия прочности и жесткости при кручении.

Уметь выполнять проектировочные и проверочные расчеты круглого бруса для статически определимых систем.

Примеры решения задач

Пример 1. Для заданного бруса (рис. 28.1) построить эпюры крутящих моментов, рациональным расположением шкивов на валу добиться уменьшения значения максимального крутящего момента. Построить эпюру крутящих моментов при рациональном расположении шкивов.

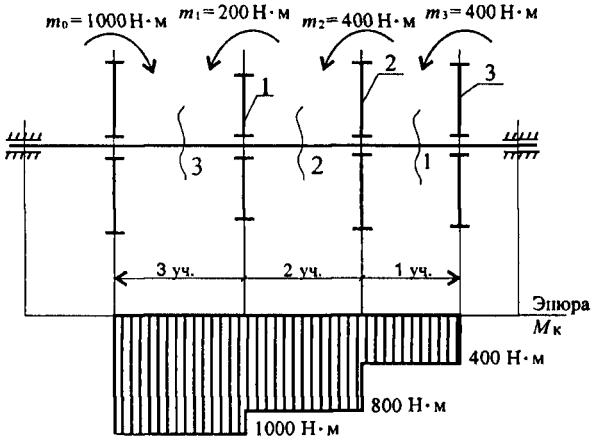


Рис. 28.1

Из условия прочности определить диаметры вала для сплошного

и кольцевого сечений, приняв $c = \dfrac{d_{вн}}{d} = 0{,}5$. Сравнить полученные результаты по полученным площадям поперечных сечений. $[\tau_к] = 35$ МПа.

Решение

1. Пользуясь методом сечений, определяем крутящие моменты на участках вала (рис. 28.2).

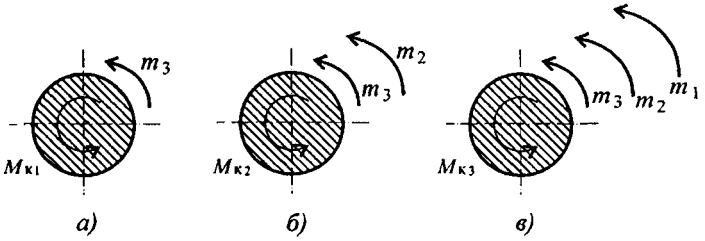


Рис. 28.2

Сечение 1 (рис. 28.2а): $M_{к1} = m_3 = 400$ Н·м.

Сечение 2 (рис. 28.2б): $M_{к2} = m_3 + m_2 = 800$ Н·м.

Сечение 3 (рис. 28.2в): $M_{к3} = m_3 + m_2 + m_1 = 1000$ Н·м.

2. Строим эпюру крутящих моментов. Значения крутящих моментов откладываем вниз от оси, т. к. моменты отрицательные.

Максимальное значение крутящего момента на валу в этом случае 1000 Н·м (рис. 28.1).

3. Выберем рациональное расположение колес на валу. Наиболее целесообразно такое размещение колес, при котором наибольшие положительные и отрицательные значения крутящих моментов на участках будут по возможности одинаковыми. Из этих соображений ведущий шкив, передающий момент 1000 Н·м, помещаем ближе к центру вала, ведомые шкивы 1 и 2 размещаем слева от ведущего с моментом 1000 Н·м, шкив 3 остается на том же мес-

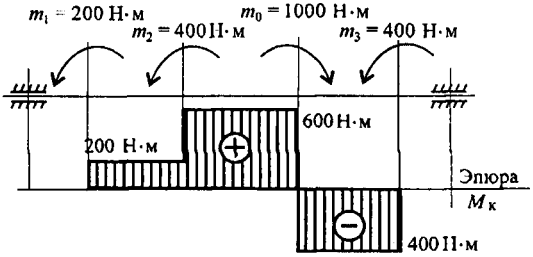


Рис. 28.3

те. Строим эпюру крутящих моментов при выбранном расположении шкива (рис. 28.3).

Максимальное значение крутящего момента на валу при выбранном расположении колес на валу 600 Н·м.

4. Определяем диаметры вала по сечениям при условии, что сечение — круг.

Условие прочности при кручении $\tau_к = M_к/W_p \leqslant [\tau_к]$.

Момент сопротивления кручению

$$W_p \geqslant \frac{M_к}{[\tau_к]}.$$

$$W_{p_1} = \frac{400 \cdot 10^3}{35} = 11{,}4 \cdot 10^3\,\text{мм}^3;$$

$$W_{p_2} = \frac{600 \cdot 10^3}{35} = 17{,}1 \cdot 10^3\,\text{мм}^3;$$

$$W_{p_3} = \frac{200 \cdot 10^3}{35} = 5{,}7 \cdot 10^3\,\text{мм}^3.$$

Определяем диаметры вала по сечениям:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}. \quad d = \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi}}.$$

$$d_1 = 10\sqrt{\frac{16 \cdot 11{,}4}{3{,}14}} = 38{,}8\,\text{мм};$$

$$d_2 = 10\sqrt{\frac{16 \cdot 17{,}1}{3{,}14}} = 44{,}25\,\text{мм};$$

$$d_3 = 10\sqrt{\frac{16 \cdot 5{,}6}{3{,}14}} = 31\,\text{мм}.$$

Округляем полученные значения: $d_1 = 40$ мм; $d_2 = 45$ мм; $d_3 = 35$ мм.

5. Определяем диаметры вала по сечениям при условии, что сечение — кольцо.

Моменты сопротивления остаются теми же.

По условию $c = d_{вн}/d = 0{,}5$.

Полярный момент сопротивления кольца

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}(1 - c^4).$$

Формула для определения наружного диаметра вала кольцевого сечения будет следующей:

$$d' = \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi(1-c^4)}}.$$

Расчет можно провести по формуле

$$d' = d\sqrt[3]{\frac{1}{(1-c^4)}}.$$

Диаметры вала по сечениям:

$$d_1' = 10\sqrt[3]{\frac{16\cdot 11{,}4}{3{,}14(1-0{,}5^4)}} = 39{,}6\,\text{мм};$$

$$d_2' = 10\sqrt[3]{\frac{16\cdot 17{,}1}{3{,}14(1-0{,}5^4)}} = 45{,}2,\,\text{мм};$$

$$d_3' = 10\sqrt[3]{\frac{16\cdot 5{,}6}{3{,}14(1-0{,}5^4)}} = 32\,\text{мм}.$$

Наружные диаметры вала кольцевого сечения практически не изменились.

Для кольцевого сечения: $d_1' = 40$ мм; $d_2' = 46$ мм; $d_3' = 35$ мм.

6. Для вывода об экономии металла при переходе на кольцевое сечение сравним площади сечений (рис. 28.4).

При условии, что сечение — круг (рис. 28.4а):

$$A = \frac{\pi d^2}{4}.$$

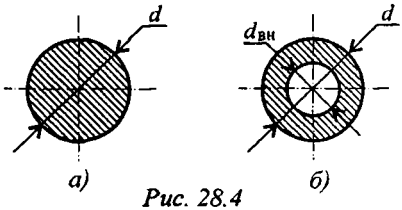


Рис. 28.4

Сплошное круглое сечение:

$$A_1 = \frac{3{,}14\cdot 40^2}{4} = 1256\,\text{мм}^2;$$

$$A_2 = \frac{3{,}14\cdot 45^2}{4} = 1590\,\text{мм}^2;$$

$$A_3 = \frac{3{,}14 \cdot 35^2}{4} = 962\,\text{мм}^2.$$

При условии, что сечение — кольцо, $c = d_{\text{вн}}/d_1 = 0{,}5$ (рис. 28.4б):

$$A' = \frac{\pi d'^2}{4} - \frac{\pi d_{\text{вн}}^2}{4} = \frac{\pi d'^2}{4}(1 - c^2).$$

Кольцевое сечение:

$$A_1' = \frac{3{,}14 \cdot 40^2}{4}(1 - 0{,}5^2) = 942\,\text{мм}^2;$$

$$A_2' = \frac{3{,}14 \cdot 46^2}{4}(1 - 0{,}5^2) = 1246\,\text{мм}^2;$$

$$A_3' = \frac{3{,}14 \cdot 35^2}{4}(1 - 0{,}5^2) = 729\,\text{мм}^2.$$

Сравнительная оценка результатов:

$$\frac{A_1}{A_1'} \cong \frac{A_2}{A_2'} \cong \frac{A_3}{A_3'} = 1{,}3.$$

Следовательно, при переходе с кругового на кольцевое сечение экономия металла по весу составит 1,3 раза.

Пример 2. Стальной вал диаметром 40 мм передает мощность 15 кВт при угловой скорости 80 рад/с (рис. 28.5); проверить прочность и жесткость вала, если допускаемое напряжение кручения 20 МПа. Модуль упругости при сдвиге $0{,}8 \cdot 10^5$ МПа. Допускаемый угол закручивания $[\varphi_0] = 0{,}6$ град/м. Построить эпюру касательных напряжений и определить значение касательного напряжения в точке, удаленной на 5 мм от оси вала.

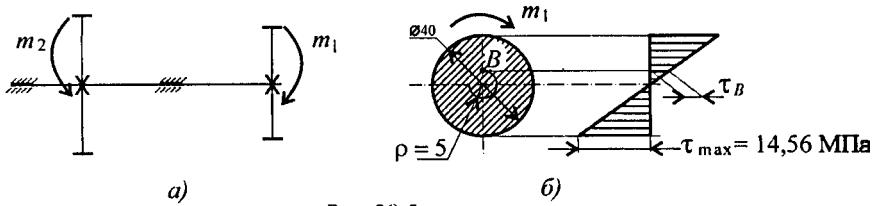


Рис. 28.5

Решение

1. Определяем вращающий момент на валу:

$$M_{\text{вр}} = \frac{P}{\omega}; \quad M_{\text{вр}} = \frac{15 \cdot 1000}{80} = 187{,}5\,\text{Н} \cdot \text{м}.$$

2. Проверка прочности вала.
Из условия равновесия $m_1 + m_2 = 0$; $m_1 = m_2 = M_{\text{к}}$.
Условие прочности:

$$\tau_{\text{к}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p} \leqslant [\tau_{\text{к}}],$$

где $\tau_{\text{к}}$ — расчетное напряжение в сечении; $M_{\text{к}}$ — крутящий момент в сечении; W_p — момент сопротивления; $[\tau_{\text{к}}]$ — допускаемое напряжение кручения.

3. $\tau_{\text{к}} = \dfrac{187{,}5 \cdot 10^3}{12\,800} = 14{,}65\,\text{МПа}$.
$W_p = 0{,}2d^3 = 0{,}2 \cdot 40^3 = 12\,800\,\text{мм}^3$.

4. Прочность обеспечена. Максимальное касательное напряжение в сечении $14{,}65\,\text{МПа} < 20\,\text{МПа}$.

5. Проверка жесткости.
Условие жесткости:

$$\varphi_0 = \frac{M_{\text{к}}}{G\mathcal{J}_p} \leqslant [\varphi_0],$$

где φ_0 — относительный угол закручивания; $\mathcal{J}_p$ — полярный момент инерции при кручении; $[\varphi_0]$ — допускаемый угол закручивания.

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0{,}1d^4.$$

$$\mathcal{J}_p = 0{,}1 \cdot 40^4 = 256 \cdot 10^3\,\text{мм}^4.$$

$$\varphi_0 = \frac{187{,}5 \cdot 10^3}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 256 \cdot 10^3} = 9 \cdot 10^{-6}\,\text{рад/мм}.$$

Угол закручивания участка $\varphi_0 = 9 \cdot 10^{-6}\,\text{рад/мм} = 9 \cdot 10^{-3}\,\text{рад/м}$.

$$[\varphi_0] = 0{,}6\,\text{град/м} \approx 0{,}01\,\text{рад/м} > 0{,}009\,\text{рад/м}.$$

Жесткость обеспечена.

6. Построим эпюру касательных напряжений в поперечном сечении (рис. 28.5б). Определим напряжение в точке, удаленной на 5 мм от оси вала.

$$\tau/\rho = \tau_{\max}/\tau_B.$$

$\tau_{\max} = 14{,}65$ МПа.

$$\frac{20}{5} = \frac{14{,}65}{\tau_B}; \quad \tau_B = \frac{14{,}65 \cdot 5}{20} \cong 3{,}66 \text{ МПа}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Определите крутящий момент в сечении 2–2 (рис. 28.6).

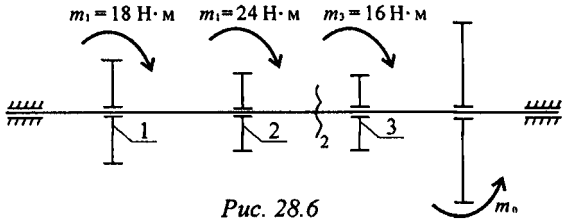


Рис. 28.6

2. В каком порядке рациональнее расположить шкивы, чтобы получить минимальную нагрузку на вал? Использовать схему рис. 28.6.

3. Как изменится напряжение в сечении, если диаметр вала уменьшить в два раза?

4. Проведены расчеты вала на прочность и жесткость. Получено: диаметр вала из расчета на прочность 65 мм, диаметр вала из расчета на жесткость 70 мм. Каким должен быть вал?

5. Как изменится угол закручивания вала, если крутящий момент увеличить в 4 раза, а диаметр уменьшить в 2 раза?

6. Напишите условия прочности и жесткости при кручении.

ЛЕКЦИЯ 29

Тема 2.6. Изгиб. Классификация видов изгиба. Внутренние силовые факторы при изгибе

Иметь представление о видах изгиба и внутренних силовых факторах.

Знать методы для определения внутренних силовых факторов и уметь ими пользоваться для определения внутренних силовых факторов при прямом изгибе.

Основные определения

Изгибом называется такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении бруса возникает внутренний силовой фактор — *изгибающий момент.*

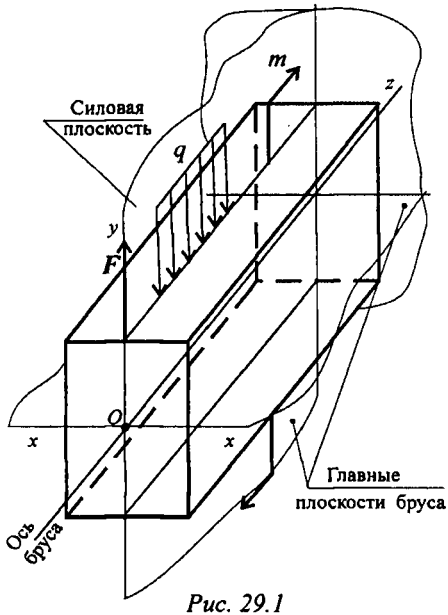


Рис. 29.1

Брус, работающий на изгиб, называют *балкой.*

Изображен брус, закрепленный справа (защемление), нагруженный внешними силами и моментом (рис. 29.1).

Плоскость, в которой расположены внешние силы и моменты, называют *силовой плоскостью.*

Если все силы лежат в одной плоскости, изгиб называют *плоским.*

Плоскость, проходящая через продольную ось бруса и одну из главных центральных осей его поперечного сечения, называется *главной плоскостью бруса.*

Если *силовая* плоскость совпадает с *главной* плоскостью бруса, изгиб называют *прямым* (рис. 29.1).

Если силовая плоскость не проходит через главную плоскость бруса, изгиб называют *косым изгибом* (рис. 29.2).

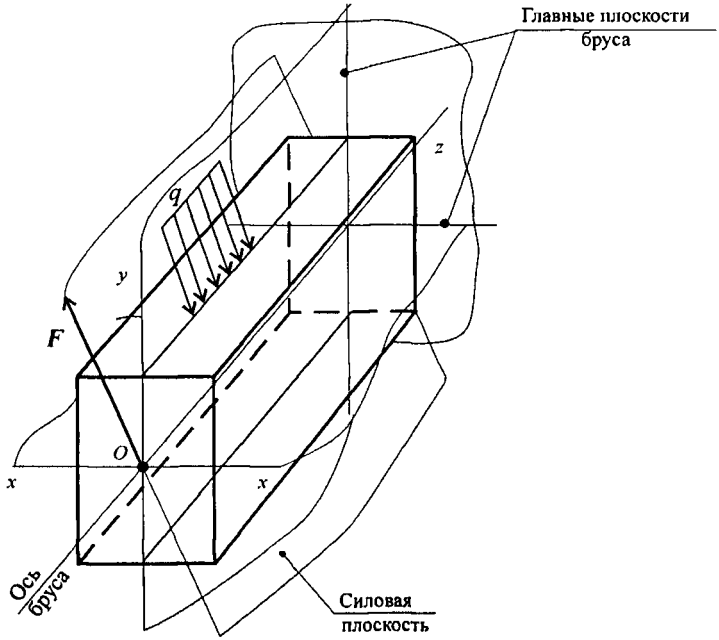


Рис. 29.2

Внутренние силовые факторы при изгибе

Пример 1. Рассмотрим балку, на которую действует пара сил с моментом m и внешняя сила $\boldsymbol{F}$ (рис. 29.3а). Для определения внутренних силовых факторов пользуемся методом сечений.

Рассмотрим равновесие участка 1 (рис. 29.3б).

Под действием внешней пары сил участок стремится развернуться по часовой стрелке. Силы упругости, возникающие в сечении 1, удерживают участок в равновесии.

Продольные силы упругости выше оси бруса направлены на

лево, а силы ниже оси направлены направо. Таким образом, при равновесии участка 1 получим: $\sum F_z = 0$. Продольная сила N в сечении равна нулю. Момент сил упругости относительно оси Ox может быть получен, если суммировать элементарные моменты сил упругости в сечении 1–1 относительно оси Ox:

$$M_x = \int_A y\,dN.$$

Этот момент называют изгибающим моментом $M_x = M_и$.

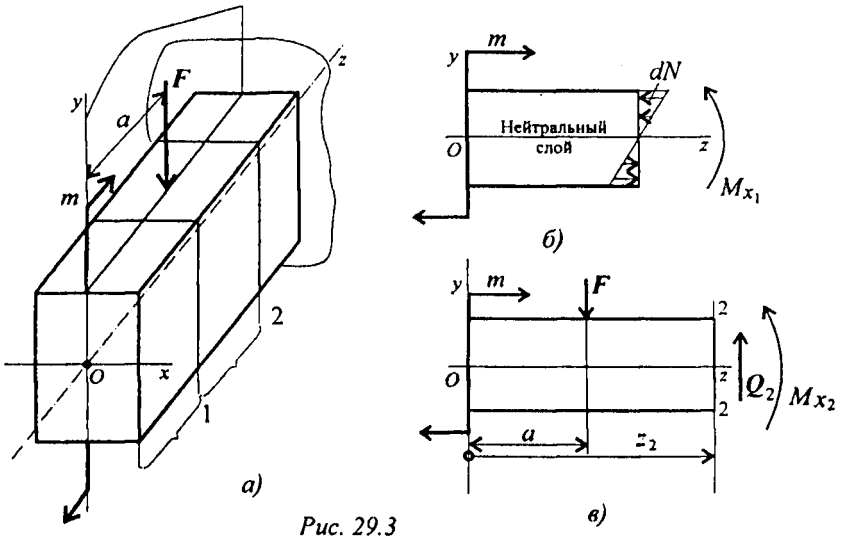


Рис. 29.3

Из схемы вала на рис. 29.3б видно, что часть волокон (выше оси) испытывают сжатие, а волокна ниже оси растянуты. Следовательно, в сечении должен существовать слой не растянутый и не сжатый, где напряжения σ равны нулю.

Такой слой называют *нейтральным слоем* (НС). Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения бруса называют нейтральной осью.

Нейтральный слой проходит через *центр тяжести сечения*. Здесь нейтральный слой совпадает с осью Ox.

Практически величина изгибающего момента в сечении определяется из уравнения равновесия: $\sum m_{x_{1-1}} = m - M_{x_1} = 0$; $M_{x_1} = m$.

Таким образом, в сечении 1–1 продольная сила равна нулю, изгибающий момент в сечении постоянен.

Изгиб, при котором в поперечном сечении бруса возникает только изгибающий момент, называется *чистым изгибом.*

Рассмотрим равновесие участка бруса от свободного конца до сечения 2 (рис. 29.3в).

Запишем уравнения равновесия для участка бруса:

$$\sum F_y = 0; \quad -F + Q_2 = 0; \quad Q_2 = F = \text{const}.$$

В сечении бруса 2–2 действует поперечная сила, вызывающая сдвиг. $\sum m_{x_{2-2}} = 0; \quad m - F(z_2 - a) - M_{x_2} = 0.$

Изгибающий момент в сечении: $M_{x_2} = m - F(z_2 - a)$;
z_2 — расстояние от сечения 2 до начала координат.

Изгибающий момент зависит от расстояния сечения до начала координат.

Изгиб, при котором в поперечном сечении бруса возникает изгибающий момент и поперечная сила, называется *поперечным изгибом.*

Принятые в машиностроении знаки поперечных сил и изгибающих моментов

Знаки поперечных сил

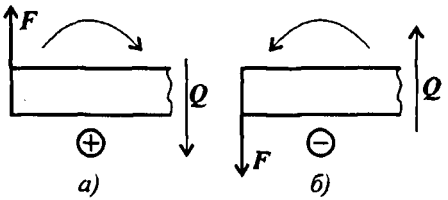


Рис. 29.4

Поперечная сила в сечении считается *положительной*, если она стремится *развернуть сечение по часовой стрелке* (рис. 29.4а), если *против*, — *отрицательно* (рис. 29.4б).

Знаки изгибающих моментов

Если действующие на участке внешние силы стремятся изогнуть балку *выпуклостью вниз*, то изгибающий момент считается *положительным* (рис. 29.5а), если *наоборот* — *отрицательным* (рис. 29.5б).

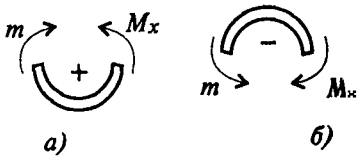


Рис. 29.5

Выводы

При чистом изгибе в поперечном сечении балки возникает только изгибающий момент, постоянный по величине.

При поперечном изгибе в сечении возникает изгибающий момент и поперечная сила.

Изгибающий момент в произвольном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных к отсеченной части, относительно рассматриваемого сечения.

Поперечная сила в произвольном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, действующих на отсеченной части на соответствующую ось.

Пример 2. На балку действует пара сил с моментом m и распределенная нагрузка интенсивностью q. Балка защемлена справа (рис. 29.6).

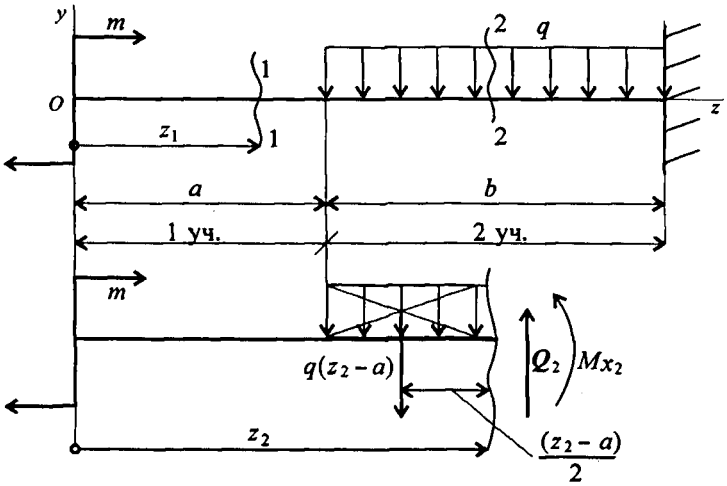


Рис. 29.6

Рассечем балку на участке 1 на расстоянии z_1 от левого края.

Рассмотрим равновесие отсеченной части. Из уравнения $\sum m_{x_1} = 0$ получим:

$$m - M_{x_1} = 0; \quad M_{x_1} = m = \text{const}.$$

Участок 1 — участок *чистого изгиба.*

Рассечем балку на участке 2 на расстоянии $z_2 > a$ от края, z_2 – расстояние сечения от начала координат.

Из уравнения $\sum F_y = 0$ найдем поперечную силу Q_2. Заменяем распределенную нагрузку на рассматриваемом участке равнодействующей силой $q(z_2 - a)$.

$$\sum F_y = -q(z_2 - a) + Q_2 = 0; \quad Q_2 = q(z_2 - a).$$

Из уравнения моментов определяем изгибающий момент в сечении: $\sum m_{x_2} = 0; \quad \sum m_{x_2} = m - q(z_2 - a)\dfrac{z_2 - a}{2} - M_{x_2} = 0;$

На втором участке возникает поперечный изгиб.

$$M_{x_2} = m - \frac{q(z_2 - a)^2}{2}.$$

Выводы

При действии распределенной нагрузки возникает поперечная сила, линейно зависящая от координаты сечения.

Изгибающий момент на участке с распределенной нагрузкой меняется в зависимости от координаты сечения по параболическому закону.

Дифференциальные зависимости при прямом поперечном изгибе

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов существенно упрощается при использовании дифференциальных зависимостей между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью равномерно распределенной нагрузки (теорема Журавского):

Поперечная сила равна производной от изгибающего момента по длине балки:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q.$$

Интенсивность равномерно распределенной нагрузки равна производной от поперечной силы по длине балки:

$$\frac{dQ}{dz} = q.$$

Из выше указанного следует:

если $M_и = \text{const}$, то $Q = 0$; если $Q = \text{const}$; то $q = 0$.

Контрольные вопросы

1. Какую плоскость называют силовой?

2. Какой изгиб называют прямым? Что такое косой изгиб?

3. Какие силовые факторы возникают в сечении балки при чистом изгибе?

4. Какие силовые факторы возникают в сечении при поперечном изгибе?

5. Определите поперечную силу и изгибающий момент в сечении 1–1 (рис. 29.7). Расстояние сечения от свободного конца балки 5 м.

6. Определите реакцию в опоре B.

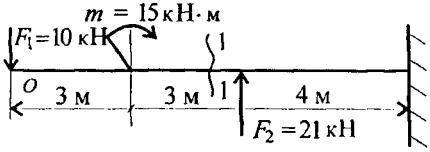


Рис. 29.7

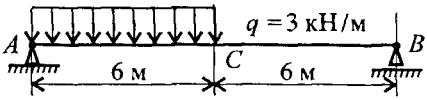


Рис. 29.8

7. Определите величину поперечной силы и изгибающего момента в сечении C, использовав схему балки (рис. 29.8).

8. Определите участок чистого изгиба (рис. 29.9).

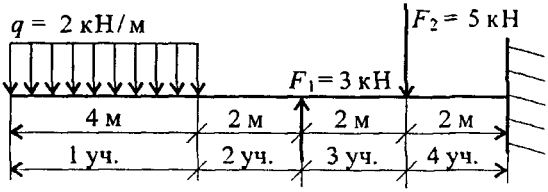


Рис. 29.9

ЛЕКЦИЯ 30

Тема 2.6. Изгиб. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. Основные правила построения эпюр

Знать порядок построения и контроля эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

Уметь строить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов можно строить, предварительно разделив балку на участки нагружения и составляя уравнения, выражающие изменения Q и M_x по участкам.

Напомним, что *границы участков нагружения* — это сечения, в которых приложены *внешние нагрузки*.

Примеры решения задач

Пример 1. На балку действуют сосредоточенные силы и момент (рис. 30.1). Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

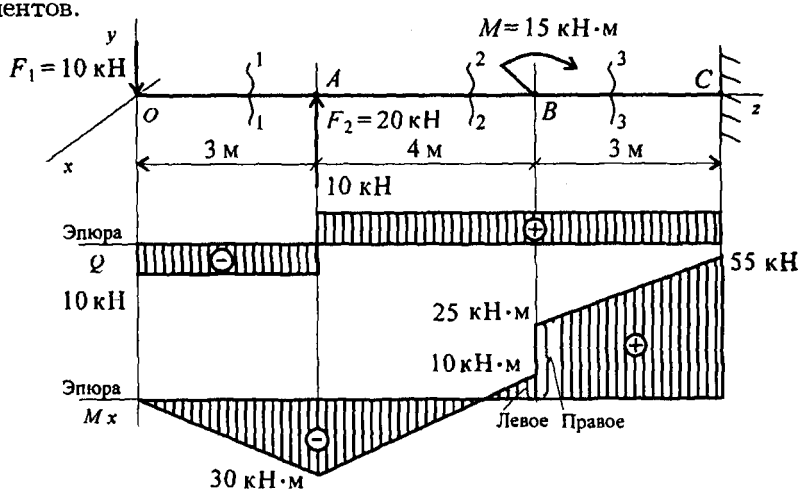


Рис. 30.1

Решение

Последовательно по участкам нагружения рассматриваем внутренние силовые факторы в сечениях. Силовые факторы определяем из условий равновесия отсеченной части. Для каждого участка за-

дельно (участок 3).

3. Рассмотрим участок 3 (рис. 30.3в).

$Q_3 = -10 + 20 = 10$ кН — положительна.

$\sum m_{x_3} = 0;$

$M_{x_3} = -Fz_3 + F_2(z_3 - 3) + m.$

$7\,\text{м} \leqslant z_3 \leqslant 10\,\text{м}$:

при $z_3 = 7$ м

$M_{x_B}^{\text{справа}} = -10 \cdot 7 + 20 \cdot 4 + 15 = 25$ кН · м;

при $z_3 = 10$ м.

$M_{x_C} = -10 \cdot 10 + 20 \cdot 10 + 15 = 55$ кН · м.

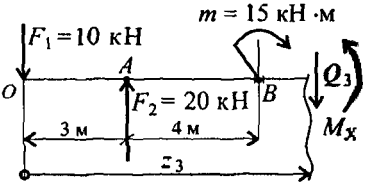


Рис. 30.3в

Обращаем внимание, что для точки B получено два значения изгибающих моментов: из уравнения для участка 2 левее точки B и из уравнения для участка 3 — правее точки B.

Это объясняется тем, что именно в этой точке приложен внешний момент и поэтому внутренний момент сил упругости меняется

В точках приложения внешнего момента на эпюре моментов появится скачок, равный величине приложенного момента.

Поперечная сила в точке B для второго и третьего участков одинакова. Следовательно, *приложение внешнего момента не отражается на эпюре поперечных сил.* График поперечной силы на участке 3 — прямая линия.

График изменения изгибающих моментов на третьем участке также прямая линия.

4. Построение эпюр. Порядок построения эпюр остается прежним: масштабы эпюр выбираются отдельно, исходя из значений максимальных сил и моментов.

Графики обводятся толстой основной линией и заштриховываются поперек. На графиках указываются значения поперечных сил, изгибающих моментов и единицы измерения.

Правила построения эпюр (рис. 30.1 и 30.4):

1. Для участка, где отсутствует распределенная нагрузка, поперечная сила постоянна, а изгибающий момент меняется по линейному закону.

2. В частном случае, когда поперечная сила на участке равна нулю, изгибающий момент постоянен (чистый изгиб), график — прямая линия, параллельная продольной оси (на рис. 30.1 отсутствует).

3. В том месте, где к балке приложена внешняя сосредоточенная сила, на эпюре Q возникает скачок на величину приложенной силы, а на эпюре моментов — излом.

4. В сечении, где к балке приложена пара сил (сосредоточенный момент), на эпюре $M_и$ возникает скачок на величину момента этой пары. Поперечная сила при этом не изменяется.

5. В сечении на конце балки поперечная сила равна приложенной в этом сечении сосредоточенной силе или реакции в заделке.

6. На свободном конце балки или шарнирно опертом конце момент равен нулю, за исключением случаев, когда в этом сечении приложена пара сил (внешний момент).

Пример 2. На двухопорную балку действуют сосредоточенные силы и моменты (рис. 30.4). Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Для двухопорной балки построение эпюр начинают с определения опорных реакций балки. Для их определения используем систему уравнений равновесия, составляем два уравнения моментов относительно шарнирных опор. Затем проводим проверку правильности решения по уравнению $\sum\limits_{0}^{n} F_{ky} = 0$ (см. лекцию 6).

Решение

1. Определение реакций в опорах. Уравнения равновесия:

$\sum m_A = 0;\ -F_1 \cdot 6 + m - R_B \cdot 10 + F_2 \cdot 12 = 0;$

$-35 \cdot 6 + 80 - R_B \cdot 10 + 70 \cdot 12 = 0;$

$R_B \cdot 10 = -210 + 80 + 840;$
$R_B = 71$ кН.
$\sum m_B = 0;\ R_A \cdot 10 + F_1 \cdot 4 + m + F_2 \cdot 2 = 0;$
$R_A \cdot 10 + 80 + 35 \cdot 4 + 70 \cdot 2 = 0;$
$R_A \cdot 10 = -80 - 140 - 140 = -360;$
$R_A = -36$ кН.

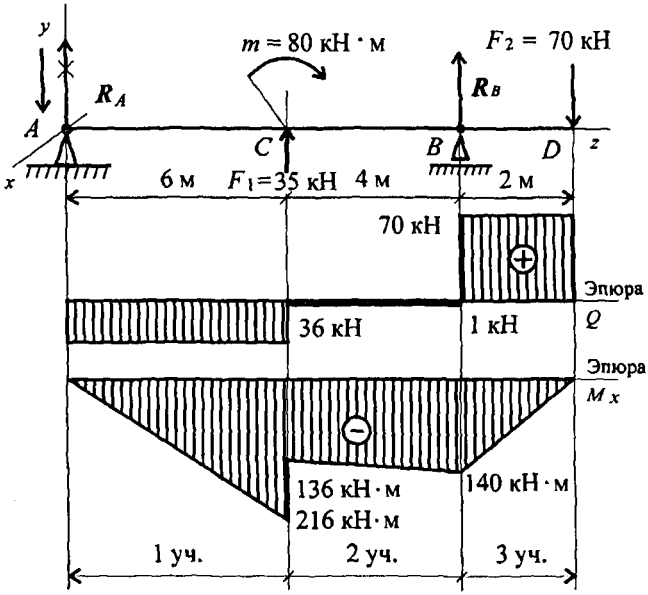


Рис. 30.4

Реакция в опоре направлена в обратную сторону.
Проверка: $\sum F_y = 0;$
$-R_A + F_1 + R_B - F_2 = 0;\qquad -36 + 35 + 71 - 70 = 0.$
Реакции определены верно.

2. Для упрощения расчетов при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов можно провести расчет по *характерным точкам* без составления уравнений.

Для этого используют известные связи между поперечной силой и изгибающим моментом и правила построения эпюр.

Участок 1 (от точки A до точки C).

В точке A приложена реакция R_A, направленная вниз. Поперечная сила на участке постоянна: $Q_1 = R_A = -36$ кН.

Момент в точке A равен нулю.

Точка C (слева). Приложена внешняя сила $F_1 = 35$ кН, направленная вверх, — здесь возникнет скачок вверх на величину 35 кН. Момент в точке C (слева) может быть рассчитан по известной зависимости $M_C^{\text{слева}} = -R_A \cdot 6$; $M_C^{\text{слева}} = -36 \cdot 6 = -216$ кН · м.

Участок 2 (от точки C справа до точки B).

Поперечная сила в точке C (справа) равна $Q_C = -R_A + F_1$; $Q_C = -36 + 35 = -1$ кН.

В точке C приложена внешняя пара сил с моментом 80 кН·м, следовательно, здесь проявляется скачок на величину приложенного момента: $M_C^{\text{справа}} = M_C^{\text{слева}} + m$; $M_C^{\text{справа}} = -216 + 80 = 136$ кН·м.

Поперечная сила на втором участке постоянна: $Q_2 = Q_C^{\text{справа}}$.

Момент в точке B определяется по зависимости
$M_B = -R_A \cdot 10 + F_1 \cdot 4 + m$; $M_B = -36 \cdot 10 + 35 \cdot 4 + 80 = -140$ кН·м.

Справа и слева от точки B момент имеет одинаковые значения.

Участок 3 (от точки B (справа) до точки D).

В точке B приложена внешняя сила R_B. Здесь появляется скачок на величину 71 кН, $Q_B = -1 + 71 = 70$ кН.

Дальше по участку поперечная сила не изменяется. Момент в точке D равен нулю, т. к. здесь не приложена внешняя пара сил: $M_D = 0$.

Рассмотрение поперечных сил и изгибающих моментов можно было провести и справа налево.

По полученным значениям сил и моментов строим эпюры (эпюры под схемой вала, рис. 30.4).

Контрольные вопросы и задания

1. Определите величины поперечных сил в сечении 1 и в сечении 2 (рис. 30.5).

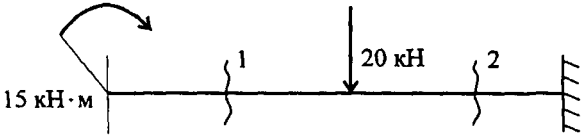


Рис. 30.5

2. Напишите формулу для расчета изгибающего момента в се-

чении 3 (рис. 30.6).

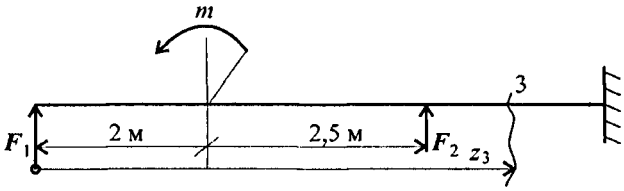


Рис. 30.6

3. Из представленных эпюр выберете эпюру поперечной силы для изображенной балки (рис. 30.7).

П о я с н е н и я.

А. Обратить внимание на знак силы в сечении 1 (знак +).

Б. Обратить внимание на величину скачков в местах приложения внешних сил.

В. Приложение момента пары сил не должно отражаться на эпюре Q.

4. По рис. 30.8 выбрать эпюру изгибающего момента для изображенной на рис. 30.7 балки.

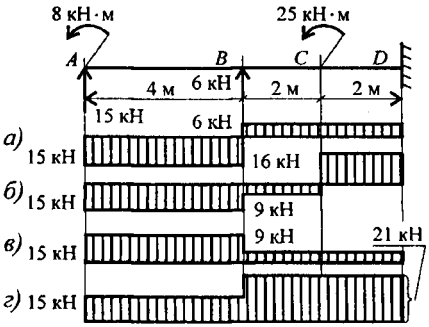


Рис. 30.7

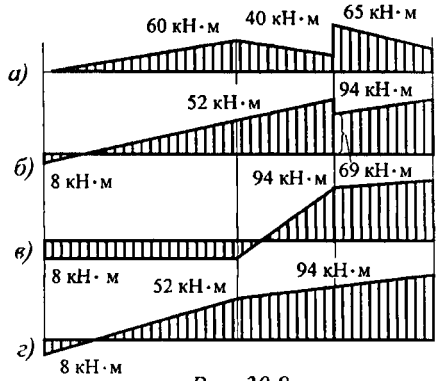


Рис. 30.8

П о я с н е н и я.

А. На конце бруса приложен момент пары, следовательно, в этом месте изгибающий момент должен быть равен этому же значению.

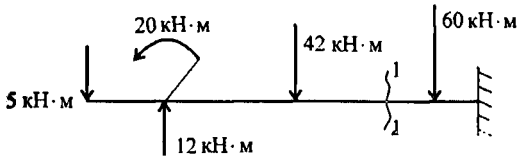
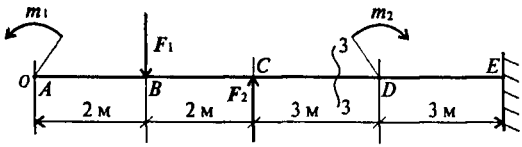
Б. Обратить внимание на знак момента в сечении 1.

В. В точке A приложена также и сила, поэтому линия, очертив-

шая эпюру, должна быть *наклонной.*

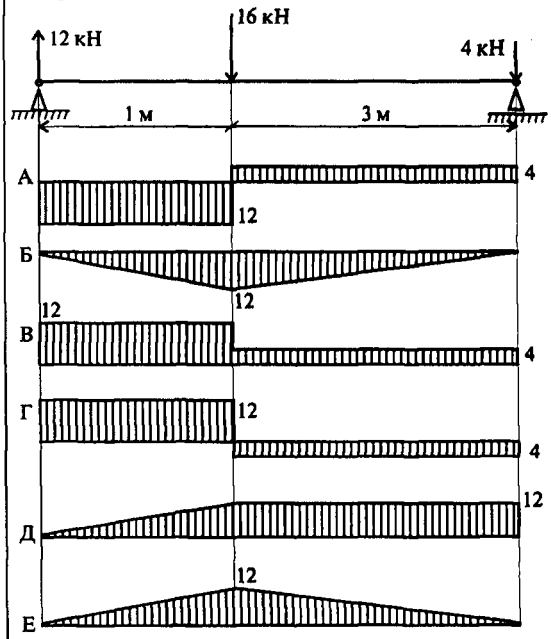
5. Ответьте на вопросы тестового задания.

Тема 2.6. Изгиб. Определение внутренних силовых факторов

Вопросы	Ответы	Код
1. Определить величину поперечной силы в сечении 1–1. 	↑ 42 кН	1
	↑ 35 кН	2
	↓ 60 кН	3
	↑ 95 кН	4
2. Выбрать формулу для расчета изгибающего момента в сечении 3–3. 	$+m_1 + F_1(z_3 - 2) - F_3(z - 2)$	1
	$-m_1 - F_1(z_3 - 2)$	2
	$-m_1 - F_1(z_3 - 2) + F_2(z_3 - 4)$	3
	$-m_1 - F_1(z_3 - 4) + F_2(z_3 - 4)$	4
3. Определить величину изгибающего момента в точке B. (См. схему к вопросу 2.) $m_1 = 15$ кН · м; $m_2 = 28$ кН · м; $F_1 = 20$ кН; $F_2 = 30$ кН.	55 кН · м	1
	100 кН · м	2
	25 кН · м	3
	3 кН · м	4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
4. Из представленных на схеме эпюр найти эпюру поперечной силы.	А	1
	Б	2
	В	3
	Г	4
5. Из представленных в вопросе 4 эпюр найти эпюру изгибающих моментов.	Е	1
	Б	2
	Д	3
	А	4



ЛЕКЦИЯ 31

Тема 2.6. Изгиб. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. Приложены сосредоточенные и распределенные нагрузки

Знать дифференциальные зависимости между интенсивностью распределенной нагрузки, поперечной силой и изгибающим моментом, основные правила построения эпюр.

Уметь строить эпюры поперечной силы и изгибающего момента в случае приложения сосредоточенных и распределенных нагрузок.

Примеры решения задач

Пример 1. Одноопорная балка нагружена сосредоточенными силами и распределенной нагрузкой (рис. 31.1). Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Решение

Задачу решаем с помощью составления уравнений поперечных сил и изгибающих моментов в поперечных сечениях балки.

При проверке эпюр используем *дифференциальные зависимости* между интенсивностью распределенной нагрузки, поперечной силой и изгибающим моментом:

1. Производная от поперечной силы по длине балки равна интенсивности распределенной нагрузки

$$\frac{dQ}{dz} = q.$$

2. Производная изгибающего момента по длине балки равна поперечной силе

$$\frac{dM_{\text{и}}}{dz} = Q.$$

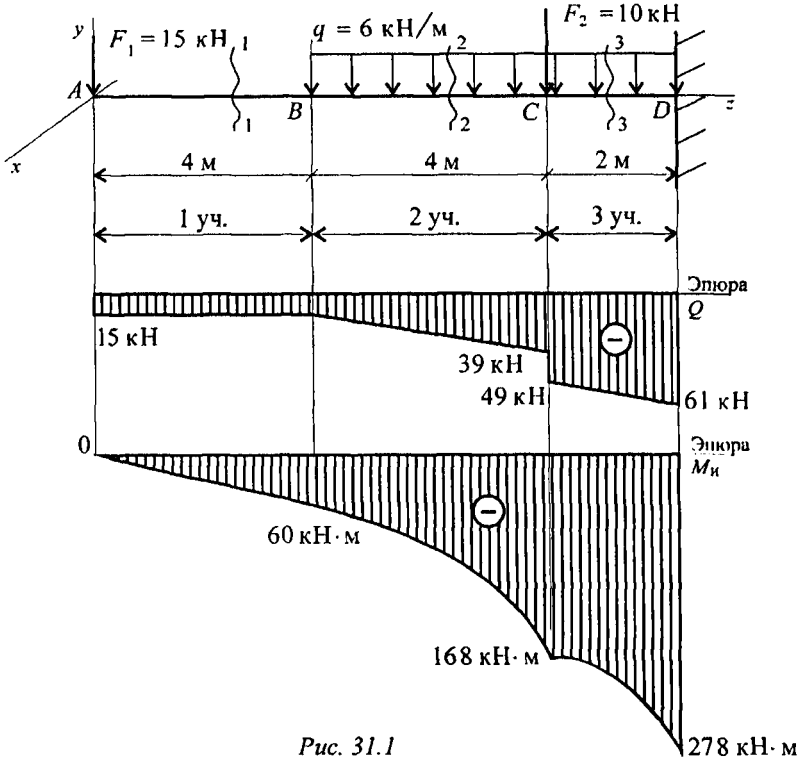


Рис. 31.1

Рассмотрим участок 1, сечение 1.

Поперечная сила $Q_1 = -F_1 = -15$ кН.

По принятому правилу знаков поперечная сила отрицательна и постоянна на этом участке.

Изгибающий момент $M_{x_1} = -F_1 z_1$.

$0 \leqslant z_1 \leqslant 4$ м: $M_A = 0$; $M_B = -15 \cdot 4 = -60$ кН · м.

Рассмотрим участок 2, сечение 2.

Поперечная сила $Q_2 = -F_1 - q(z_2 - 4)$.

4 м $\leqslant z_2 \leqslant 8$ м: $Q_B = -F_1 = -15$ кН; $Q_C^{\text{слева}} = -39$ кН.

Поперечная сила изменяется по линейному закону.

Изгибающий момент $M_{x_2} = -F_1 z_2 - \dfrac{q(z_2 - 4)^2}{2}$.

4 м $\leqslant z_2 \leqslant 8$ м:

при $z_2 = 4$ м изгибающий момент $M_B = -60$ кН · м. В точке B нет внешнего момента, поэтому изгибающий момент слева и справа от точки B одинаков. В этом случае рассчитывать его дважды не следует;

при $z_2 = 8$ м $\quad M_C = -15 \cdot 8 - \dfrac{6 \cdot 4^2}{2} = -168$ кН · м.

Рассмотрим участок 3, сечение 3.

В точке C приложена внешняя сила $\boldsymbol{F}_2$. На эпюре должен быть скачок, равный приложенной силе; на эпюре моментов должен быть излом.

Поперечная сила на участке 3: $Q_3 = -F_1 - q(z_3 - 4) - F_2$;

при $z_3 = 8$ м $\quad Q_C^{\text{справа}} = -15 - 6 \cdot 4 - 10 = -49$ кН;

точка C: $Q_C^{\text{слева}} = 39$ кН; $Q_C^{\text{справа}} = 49$ кН;

при $z_3 = 10$ м $\quad Q_D = -15 - 6 \cdot 6 - 10 = -61$ кН.

Поперечная сила изменяется по линейному закону.

Изгибающий момент $M_{x_3} = -F_1 z_3 - \dfrac{q(z_3 - 4)^2}{2} - F_2(z_3 - 8)$.

8 м $\leqslant z_3 \leqslant 10$ м:

при $z_3 = 10$ м $\quad M_D = -15 \cdot 10 - \dfrac{6(10^2 - 4)^2}{2} - 10(10 - 8) = -278$ кН · м.

На участках 2 и 3 эпюра изгибающих моментов ограничена квадратичной параболой.

По полученным результатам, учитывая дифференциальные зависимости между поперечной силой и изгибающим моментом, строим эпюры Q и M_x. *На втором и третьем участках поперечная сила не имеет нулевых значений, поэтому на эпюре моментов нет экстремумов.*

Основные правила построения эпюр в случае приложения распределенной нагрузки. Контроль правильности решений

1. Для участка балки с равномерно распределенной нагрузкой поперечная сила Q изменяется по линейному закону, эпюра ограничена наклонной прямой. Изгибающий момент изменяется по квадратичному закону, эпюра M_x ограничена параболой второго порядка.

2. В сечении, где эпюра Q переходит через ноль (наклонная линия пересекает ось абсцисс), изгибающий момент экстремален: касательная к эпюре M_x в этом месте параллельна оси абсцисс.

3. Параболическая и прямолинейная части эпюры моментов там, где кончается или начинается распределенная нагрузка, сопрягаются плавно, без излома, если в соответствующем сечении к балке не приложена сосредоточенная сила.

4. Если распределенная нагрузка направлена вниз, то эпюра момента очерчена параболой, обращенной выпуклостью вверх.

5. Из теоремы Журавского следует:

— если на участке $Q > 0$, $M_и$ растет;

— если на участке $Q < 0$, $M_и$ убывает;

— если на участке $Q = 0$, изгибающий момент постоянен (чистый изгиб);

— если в точке $Q = 0$, изгибающий момент достигает экстремального значения ($M_и^{min}$ или $M_и^{max}$).

Пример 2. Расчет двухопорной балки. Двухопорная балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой (рис. 31.2).

Решение

При определении реакций в опоре равномерно распределенную нагрузку можно заранее заменить равнодействующей сосредоточенной силой: $G = ql$; $q = 4\,кН/м$; $G = 4 \cdot 6 = 24\,кН$ (рис. 31.2).

При построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов распределенная нагрузка учитывается постепенно.

Расчет балки можно провести по характерным точкам, при этом необходимо знать правила построения эпюр, перечисленные выше.

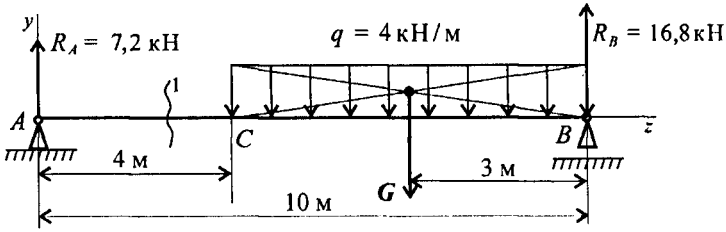


Рис. 31.2

Определяем реакции в опорах балки.

$$\sum m_A = 0;\ G \cdot 7 - R_B \cdot 10 = 0;\ R_B = \frac{G \cdot 7}{10};\ R_B = \frac{24 \cdot 7}{10} = 16{,}8\,кН.$$

$$\sum m_B = 0;\ R_A \cdot 10 - G \cdot 3 = 0;\ R_A = \frac{G \cdot 3}{10};\ R_A = \frac{24 \cdot 3}{10} = 7{,}2\,\text{кН}.$$

Проверка: $\sum F_y = 0$; $R_A - G + R_B = 0$; $7{,}2 - 24 + 16{,}8 = 0$.

Построение эпюр

Анализируем схему балки.

Рассмотрим участок 1 до сечения 1.

В опоре A действует сосредоточенная сила $R_A = 7{,}2\,\text{кН}$. На участке 1 поперечная сила остается постоянной: $Q_1 = R_A = 7{,}2\,\text{кН}$ (рис. 31.3).

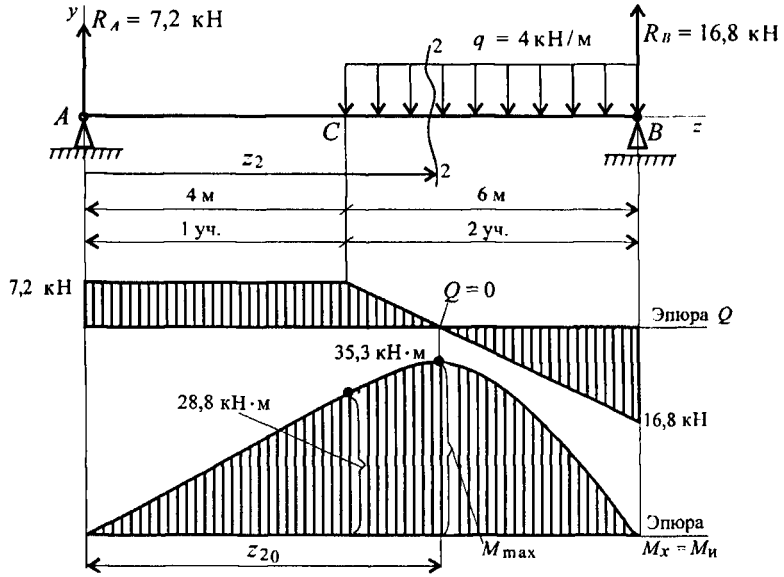


Рис. 31.3

Изгибающий момент в точке A равен нулю, т. к. здесь нет момента внешней пары сил: $M_A = 0$.

Момент в точке C (граница участка, $z = 4\,\text{м}$) $M_C = R_A \cdot 4$; $M_C = 7{,}2 \cdot 4 = 28{,}8\,\text{кН} \cdot \text{м}$.

Эпюра очерчивается прямой линией, наклонной к оси Oz (рис. 31.3).

Рассмотрим участок 2 (рис. 31.3). Здесь действует распределенная нагрузка интенсивностью $q = 4\,\text{кН/м}$. При перемещении вдоль оси балки направо распределенная нагрузка суммируется. Эпюра Q_2 — прямая линия, наклонная к оси Oz. Распределенная нагрузка направлена вниз (см. Основные правила построения эпюр, п. 4), здесь эпюра изгибающего момента очерчена параболой, обращенной выпуклостью вверх.

Реакция в опоре R_A и распределенная нагрузка направлены в разные стороны. Следовательно, возможна точка, в которой, по правилу 2, $Q_2 = 0$, а изгибающий момент экстремален.

Для построения эпюры моментов необходимо составить уравнение поперечной силы на участке 2 и приравнять величину поперечной силы нулю. Из уравнения можно определить координату точки, в которой изгибающий момент экстремален.

Проводим необходимые расчеты, определяем величины поперечных сил и изгибающих моментов в характерных точках.

Рассмотрим участок 2, сечение 2 (рис. 31.3).

Уравнение поперечной силы $Q_2 = R_A - q(z_2 - 4) = 0$.

Откуда: $z_{2_0} = \dfrac{R_A}{q} + 4$; $z_{2_0} = \dfrac{7{,}2}{4} + 4 = 5{,}8\,\text{м}$, z_{2_0} — координата точки, где изгибающий момент экстремален, т. к. $Q_2 = 0$.

Уравнение момента на участке 2:

$$M_{x_2} = R_A z_2 - q\frac{(z_2 - 4)^2}{2}.$$

При $z_{2_0} = 5{,}8\,\text{м}$ $\quad M_{x_2} = M_{x_2}^{\max}$.

Максимальное значение изгибающего момента на участке 2

$$M_{x_2}^{\max} = 7{,}2 \cdot 5{,}8 - 4\frac{(5{,}8 - 4)^2}{2} = 35{,}3\,\text{кН} \cdot \text{м}.$$

Значения поперечной силы и изгибающего момента в точке B: $Q_B = R_B = 16{,}8\,\text{кН}$; $M_B = 0$.

Строим эпюру поперечной силы. Первый участок — прямая линия, параллельная оси Oz. В точке C эпюра становится наклонной. Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 31.3).

Участок 1 эпюра — прямая линия; $M_A = 0$; $M_C = 28{,}8\,\text{кН} \cdot \text{м}$.

Участок 2 эпюра — парабола с экстремумом в точке $z = 5{,}8\,\text{м}$; $M_x^{\max} = 35{,}3\,\text{кН} \cdot \text{м}$; $M_B = 0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Если эпюра поперечной силы ограничена наклонной прямой, как выглядит эпюра изгибающего момента?

2. Как определить положение экстремального значения изгибающего момента при действии распределенной нагрузки на участке балки?

3. Распределенная нагрузка направлена вверх. Как выглядит парабола, очерчивающая эпюру изгибающих моментов вдоль оси бруса?

4. Определите координату z, в которой поперечная сила равна нулю (рис. 31.4).

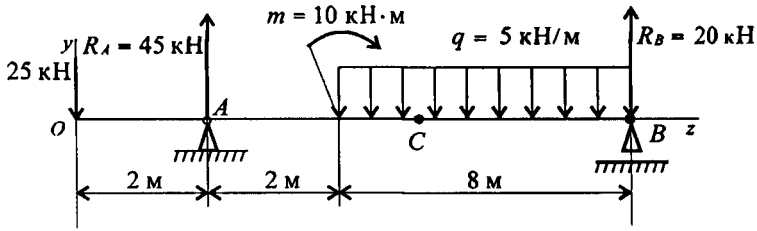


Рис. 31.4

5. Определите величину изгибающего момента в точке C ($z = 5$ м), используя схему рис. 31.4.

ЛЕКЦИЯ 32

Тема 2.6. Изгиб. Нормальные напряжения при изгибе. Расчеты на прочность

Знать распределение нормальных напряжений по сечению балки при чистом изгибе, расчетные формулы и условия прочности.

Уметь выполнять проектировочные и проверочные расчеты на прочность, выбирать рациональные формы поперечных сечений.

Деформации при чистом изгибе

При чистом изгибе в сечении возникает только один внутренний силовой фактор — изгибающий момент.

Рассмотрим деформацию бруса, нагруженного внешней парой сил с моментом m (рис. 32.1а).

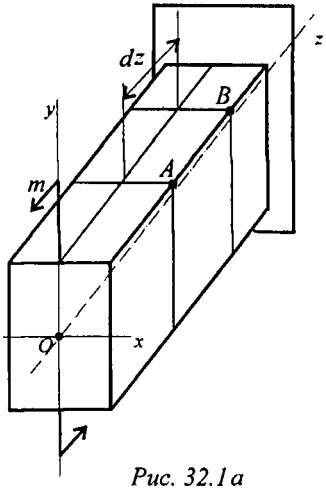


Рис. 32.1а

При чистом изгибе выполняются *гипотезы плоских сечений и ненадавливаемости слоев.*

Сечения бруса, плоские и перпендикулярные продольной оси, после деформации остаются плоскими и перпендикулярными продольной оси.

Продольные волокна не давят друг на друга, поэтому слои испытывают простое растяжение или сжатие.

Действуют только нормальные напряжения.

Поперечные размеры сечений не меняются.

Продольная ось бруса после деформации изгиба искривляется и образует дугу окружности радиуса ρ (рис. 32.1б). Материал подчиняется закону Гука.

Можно заметить, что слои, расположенные выше продольной оси, растянуты, расположенные ниже оси — сжаты (рис. 32.1б). Так как деформации по высоте сечения меняются непрерывно, имеется

слой, в котором нормальные напряжения σ равны нулю; такой слой называют *нейтральным слоем* (НС). Доказано, нейтральный слой проходит через центр тяжести сечения; ρ — радиус кривизны нейтрального слоя.

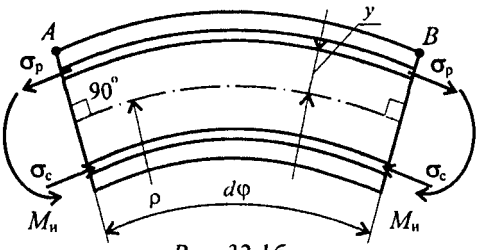


Рис. 32.1б

Рассмотрим деформацию слоя, расположенного на расстоянии y от нейтральной оси (участок AB, рис. 32.1).

Длина участка до деформации равна длине нейтральной оси:

$$l_0 = \rho\, d\varphi.$$

Абсолютное удлинение слоя $\Delta l = (\rho + y)\, d\varphi - \rho\, d\varphi = y\, d\varphi$ (рис. 32.1б).

Относительное удлинение $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$; $\varepsilon = \dfrac{y\, d\varphi}{\rho\, d\varphi} = \dfrac{y}{\rho}$.

Относительное удлинение прямо пропорционально расстоянию слоя до нейтральной оси.

Используем закон Гука при растяжении: $\sigma = E\varepsilon$.

Получим зависимость нормального напряжения при изгибе от положения слоя:

$$\sigma_и = \frac{Ey}{\rho}.$$

Формула для расчета нормальных напряжений при изгибе

Рассмотрим изогнутый участок бруса dz (рис. 32.2).

dN — элементарная продольная сила в точке сечения;

dA — площадь элементарной площадки;

dm — элементарный момент, образованный силой относительно нейтрального слоя.

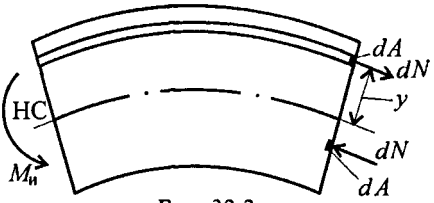


Рис. 32.2

$$dN = \sigma_и\, dA; \quad dm = \sigma_и y\, dA.$$

Суммарный изгибающий момент сил упругости в сечении

$$M_и = \int\limits_A \sigma_и y\,dA = \int\limits_A \frac{Ey}{\rho} y\,dA = \frac{E}{\rho}\int\limits_A y^2\,dA.$$

$\int\limits_A y^2\,dA = \mathcal{J}_x$ — осевой момент инерции сечения (лекция 25).

$$\text{Таким образом,} \qquad M_и = \frac{E}{\rho}\mathcal{J}_x.$$

$$\text{Откуда } E/\rho = M_и/\mathcal{J}_x. \quad \text{Ранее получено} \quad \sigma_и = \frac{Ey}{\rho}.$$

После ряда преобразований получим формулу для определения нормальных напряжений в любом слое поперечного сечения бруса:

$$\sigma_и = \frac{M_и y}{\mathcal{J}_x},$$

где $\mathcal{J}_x$ — геометрическая характеристика сечения при изгибе.

Эпюра распределения нормальных напряжений при изгибе изображена на рис. 32.3.

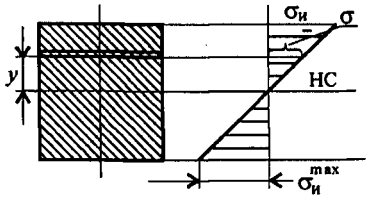


Рис. 32.3

По эпюре распределения нормальных напряжений видно, что *максимальное напряжение возникает на поверхности.*

Подставим в формулу напряжения значение $y = y_{\max}$.

Получим $\sigma_и = \dfrac{M_и y_{\max}}{\mathcal{J}_x}$.

Отношение $\dfrac{\mathcal{J}_x}{y_{\max}}$ принято обозначать W_x: $W_x = \dfrac{\mathcal{J}_x}{y_{\max}}$.

Эта величина называется *моментом сопротивления* сечения при изгибе, или осевым моментом сопротивления.

Размерность — мм^3.

W_x характеризует влияние формы и размеров сечения на прочность при изгибе.

Напряжение на поверхности $\sigma_и^{\max} = \dfrac{M_и}{W_x}$.

Рациональные сечения при изгибе

Определим рациональные сечения при изгибе, для этого сравним моменты сопротивления простейших сечений.

Осевой момент инерции прямоугольника (рис. 32.4, вывод формулы в лекции 25) равен

$$\mathcal{J}_x = \frac{bh^3}{12}.$$

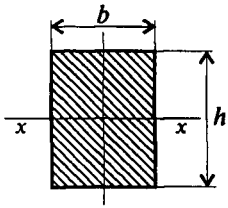


Рис. 32.4

Осевой момент сопротивления прямоугольника

$$W_x = \frac{\mathcal{J}_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}.$$

Сравним сопротивление изгибу двух прямоугольных сечений (рис. 32.5).

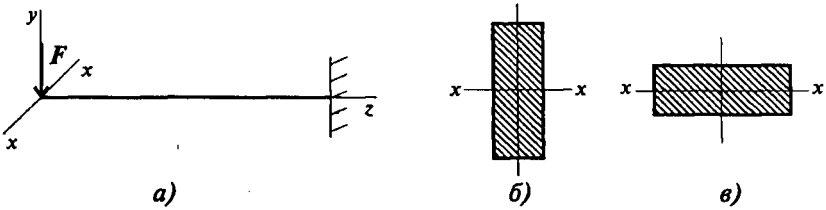


Рис. 32.5

Вариант на рис. 32.5б обладает бóльшим сопротивлением изгибу при прочих равных условиях.

Осевой момент инерции круга (рис. 32.6) равен

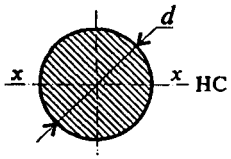


Рис. 32.6

$$\mathcal{J}_x = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Осевой момент сопротивления круга

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Все необходимые расчетные данные (площади, моменты инерции и сопротивления) стандартных сечений приводятся в таблицах стандартов (Приложение 1).

Для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие, выбирают сечения, симметричные относительно оси, вокруг которой совершается изгиб (рис. 32.7).

Пример

Сравним моменты сопротивления двух сечений одинаковой площади: двутавра (рис. 32.7г) и круга (рис. 32.7а).

Двутавр № 10 имеет площадь 12 см^2, осевой момент инерции 198 см^4, момент сопротивления 39,7 см^3.

Круг той же площади имеет диаметр $d = \sqrt{4A/\pi} = 4$ см, осевой момент инерции $J_x = 25{,}12$ см^4, момент сопротивления $W_x = 6{,}2$ см^3.

$$\frac{W_{x_1}}{W_{x_2}} = \frac{39{,}7}{6{,}2} \approx 6.$$

Сопротивление изгибу у двутавровой балки в шесть раз выше, чем у балки круглого сечения.

Из этого примера можно сделать вывод: сечения прямоугольные, квадратные, круглые и ромбовидные нерациональны (рис. 32.7а, б).

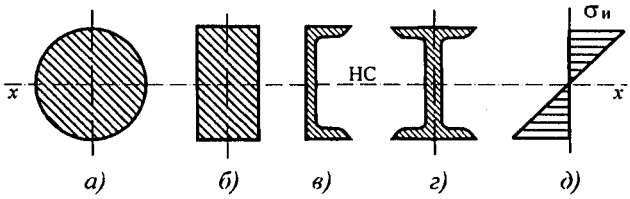


Рис. 32.7

Для материалов, обладающих разной прочностью при растяжении и сжатии (хрупкие материалы обладают значительно большей прочностью на сжатие, чем на растяжение), выбирают асимметричные сечения тавр, рельс и др.

Расчет на прочность при изгибе

Рассчитать на прочность — это значит определить напряжение и сравнить его с допустимым.

Условие прочности при изгибе:

$$\sigma_{\text{и}}^{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leqslant [\sigma_{\text{и}}],$$

где $[\sigma_и]$ — допускаемое напряжение.

По этому неравенству проводят *проверочные расчеты* после окончания конструирования балки.

Для балок из хрупких материалов расчеты ведут по растянутой и сжатой зоне одновременно (рис. 32.8).

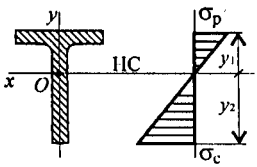


Рис. 32.8

$$\sigma_р^{max} = \frac{M_x y_1}{J_x} \leqslant [\sigma_р];$$

$$\sigma_с^{max} = \frac{M_x y_2}{J_x} \leqslant [\sigma_с].$$

При *проектировочном расчете* определяют потребные размеры поперечных сечений балки или подбирают материал.

Схема нагружения и действующие нагрузки известны.

По условию прочности можно определить *нагрузочную способность балки* $[M_и] = W_p[\sigma]$.

Примеры решения задач

Подобрать размеры сечения балки в виде двутавра. Известна схема нагружения балки (рис. 32.9), материал — сталь, допускаемое напряжение материала при изгибе $[\sigma_р] = [\sigma_с] = 160$ МПа.

Решение

1. Для защемленной балки реакции в опоре определять не следует.

Проводим расчеты по характерным точкам. Размеры сечения подбираем из расчета по нормальным напряжениям. Эпюру поперечных сил строить необязательно.

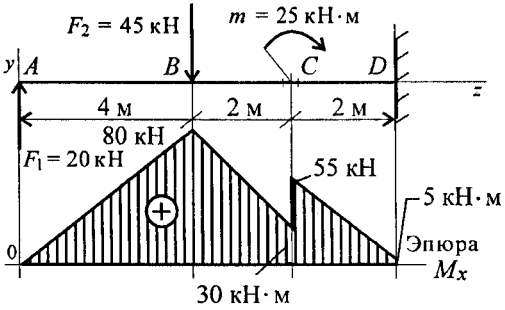


Рис. 32.9

Определяем моменты в характерных точках.

$M_A = 0$; $M_B = F_1 \cdot 4$; $M_B = 20 \cdot 4 = 80$ кН · м.

В точке C приложен внешний момент пары, поэтому расчет проводим для левого сечения (без момента) и для правого — с момен-

том m.

$M_C^{\text{лев}} = F_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 2$; $M_C^{\text{лев}} = 20 \cdot 6 - 45 \cdot 2 = 30$ кН·м. Момент положительный.

$M_C^{\text{прав}} = M_C^{\text{лев}} + m$; $M_C^{\text{прав}} = 30 + 25 = 55$ кН·м.

Момент в заделке $M_D = F_1 \cdot 8 - F_2 \cdot 4 + m$;

$M_D = 20 \cdot 8 - 45 \cdot 4 + 25 = 5$ кН·м.

Выбираем соответствующий масштаб по максимальному значению изгибающего момента.

Опасное сечение — сечение балки, где действует максимальный момент. Подбираем размеры балки в опасном сечении по условию прочности

$$\sigma_{\text{и}}^{\max} = \frac{M_{\text{и}}}{W_x} \leqslant [\sigma_{\text{и}}]; \quad W_x \geqslant \frac{M_{\text{В}}}{[\sigma_{\text{и}}]};$$

$$W_x = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{160} = 500 \cdot 10^3 \text{ мм}^3; \quad W_x = 500 \text{ см}^3.$$

Основываясь на значении $W_x = 500$ см^3 по таблице ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 30а: момент сопротивления $W_x = 518$ см^3; площадь сечения $A = 49{,}9$ см^3.

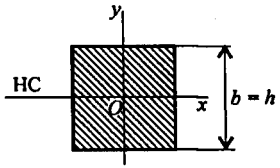


Рис. 32.10

Для сравнения рассчитаем размеры балки квадратного сечения (рис. 32.10) при том же моменте сопротивления сечения.

$$W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad b = h; \quad W_x = \frac{b^3}{6}.$$

$$W_x = 500 \text{ см}^3 = \frac{b^3}{6}; \quad b \geqslant \sqrt[3]{6W_x}.$$

Сторона квадрата $b \geqslant \sqrt[3]{6 \cdot 500} \approx 14{,}5$ см. Площадь сечения балки $A = b^2 = 14{,}5^2 = 210{,}2$ см^2.

$$\frac{A_{\text{квадрата}}}{A_{\text{двутавра}}} = \frac{210{,}2}{49{,}9} = 4{,}2.$$

Балка квадратного сечения в 4 раза тяжелее.

Контрольные вопросы и задания

1. Напишите формулу для определения нормального напряжения при изгибе в любой точке поперечного сечения.

2. Нормальное напряжение в точке B поперечного сечения 120 МПа. Определите напряжение в точке C (рис. 32.11).

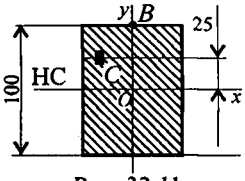


Рис. 32.11

3. В каком случае (рис. 32.12) балка выдержит бóльшую нагрузку?

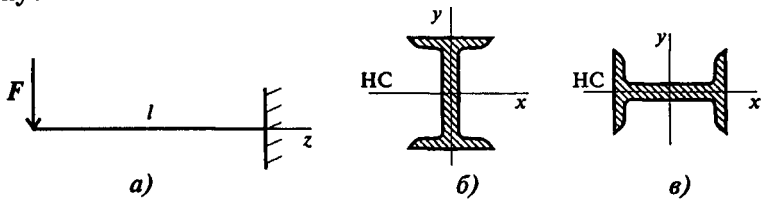


Рис. 32.12

4. Напишите формулы для определения момента инерции и момента сопротивления для прямоугольника. Что характеризуют эти величины? Укажите единицы измерения этих величин.

5. Напишите условие прочности при изгибе.

6. Определите изгибающий момент в точке B (рис. 32.13), используя метод характерных точек.

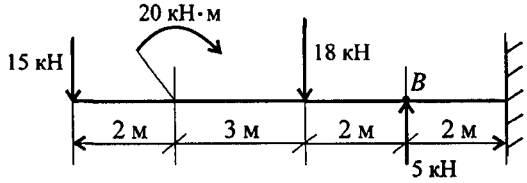


Рис. 32.13

7. Подберите размеры поперечного сечения балки в виде швеллера. Максимальный изгибающий момент 15 кН·м; допускаемое напряжение материала балки 160 МПа.

ЛЕКЦИЯ 33

Тема 2.6. Понятие о касательных напряжениях при изгибе. Линейные и угловые перемещения при изгибе, их определение

Иметь представление о касательных напряжениях при изгибе, об упругой линии балки, о деформациях при изгибе и методах определения линейных и угловых перемещений.

Знать один из методов определения линейных и угловых перемещений.

Поперечный изгиб. Внутренние силовые факторы. Напряжения

Рассмотрим изгиб балки, защемленной справа и нагруженной сосредоточенной силой $\boldsymbol{F}$ (рис. 33.1).

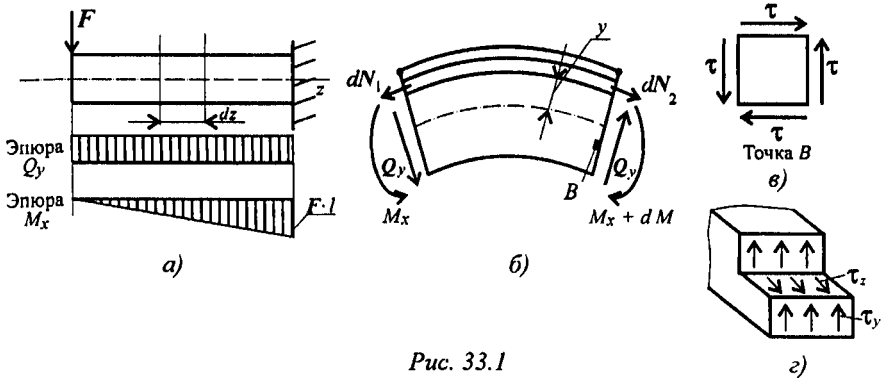


Рис. 33.1

В поперечном сечении возникает изгибающий момент, меняющийся по длине балки, и постоянная поперечная сила Q.

Рассмотрим участок балки длиной dz (рис. 33.1б).

Изгибающий момент, как известно, является равнодействующим элементарных моментов, возникающих в результате действия продольных сил упругости. Связь между нормальными напряжениями в точках поперечного сечения и изгибающим моментом уже рас-

сматривалась:

$$M_x = \int\limits_A \sigma_и y\, dA.$$

Поперечная сила представляет собой равнодействующую касательных сил упругости, возникающих в поперечных сечениях (рис. 33.1в), и связана с касательными напряжениями зависимостью

$$Q_y = \int\limits_A \tau\, dA.$$

В силу парности касательных напряжений в продольных сечениях балок, параллельных нейтральному слою, возникают такие же по величине касательные напряжения (рис. 33.1г).

Появление касательных напряжений в продольных слоях балок подтверждается следующим опытом. Рассмотрим поперечный изгиб двух балок, одна — цельная, другая — составленная из нескольких положенных друг на друга слоев (рис. 33.2). Цельная балка изогнется (рис. 33.2а), брусья второй балки сдвинутся (рис. 33.2б). Каждый из брусьев деформируется независимо. В цельной балке сдвигу слоев препятствуют возникающие касательные напряжения.

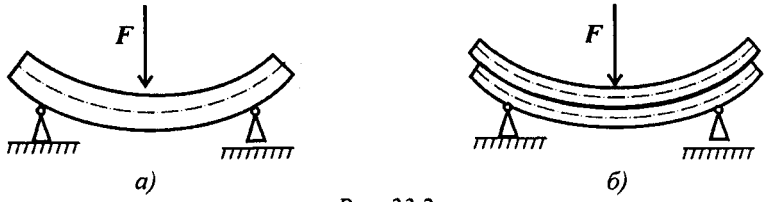


Рис. 33.2

На поверхности касательные напряжения равны нулю.

Формула для расчета касательных напряжений для балки квадратного сечения была получена в 1855 году русским инженером Д. И. Журавским,

$$\tau = \frac{Q_y S_x}{\mathcal{J}_x b},$$

где Q_y — поперечная сила в сечении; S_x — статический момент отсеченной части относительно оси x, $S_x = A_{отс} y_c$, $A_{отс}$ — площадь поперечного сечения отсеченной части (рис. 33.3); $\mathcal{J}_x$ — момент инерции сечения; b — ширина балки.

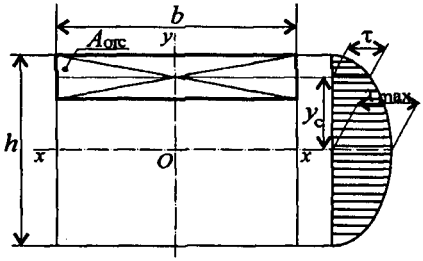


Рис. 33.3

Наибольшее значение касательного напряжения достигается на нейтральной оси:

$$\tau_{max} = \frac{1{,}5Q_y}{A},$$

A — площадь сечения.

Максимальное напряжение при поперечном изгибе в полтора раза больше среднего значения

$$\tau_{сред} = Q_y/A.$$

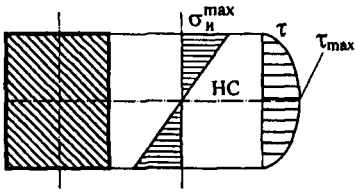


Рис. 33.4

Обнаруживается, что максимальные нормальные напряжения в сечении не совпадают с максимальными касательными (рис. 33.4).

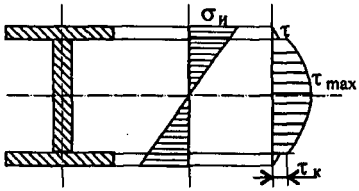


Рис. 33.5

Для длинных балок расчет проводят только по нормальным напряжениям, т. к. касательные здесь незначительны. Для коротких балок, нагруженных значительными поперечными силами вблизи опор, проводят расчет по касательным напряжениям. Однако для тонкостенных профилей (двутавр, швеллер) необходимо проверять прочность балки в точках, где полка сочленяется со стенкой. Здесь и нормальные, и касательные напряжения значительны (рис. 33.5).

Понятия о линейных и угловых перемещениях при изгибе

Под действием поперечных нагрузок продольная ось искривляется (рис. 33.6). Если материал подчиняется закону Гука, после снятия нагрузок брус выпрямляется, поэтому изогнутую ось бруса называют *упругой* линией. По форме упругой линии балки можно судить о перемещениях при изгибе.

При прямом поперечном изгибе бруса его ось, искривляясь, оста-

ется в силовой плоскости. В результате деформации бруса каждое из его поперечных сечений получает вертикальное и горизонтальное перемещение, а само сечение поворачивается на некоторый угол θ.

Деформации должны иметь упругий характер, они достаточно малы. В этом случае горизонтальные перемещения сечений ничтожно малы и не учитываются. Рассматривают вертикальные перемещения центра тяжести сечения, называемые прогибами (y). Максимальные прогибы обозначают $f = y_{\max}$. Для обеспечения нормальной работы устанавливаемого на балках оборудования проводят расчет на жесткость.

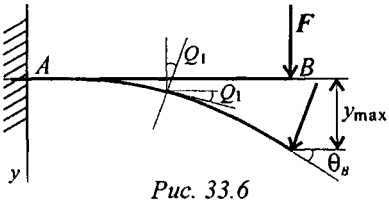


Рис. 33.6

Условие жесткости выражается неравенством

$$f \leqslant [f],$$

где f — максимальный расчетный прогиб балки; $[f]$ — допускаемый прогиб.

Иногда проверяется угол поворота сечения $\theta < [\theta]$.

Допускаемый прогиб невелик: от 1/200 до 1/1000 пролета балки; допускаемый угол поворота $1 \cdot 10^{-3}$ рад.

Существует несколько методов определения перемещений сечений при изгибе. Один из них основан на дифференцировании уравнения упругой линии, более рациональный способ — использование интегралов Мора. Метод Мора — универсальный способ определения линейных и угловых перемещений в любых системах.

Для облегчения расчетов на жесткость можно использовать формулы прогибов и углов поворота сечений балок для простейших случаев нагружений. Наиболее распространенные случаи нагружения и расчетные формулы приведены в таблице.

При решении используем принцип независимости действия сил. Заданный случай нагружения делится на составляющие, для которых прогибы рассчитываются по известным табличным формулам, результаты расчетов суммируются.

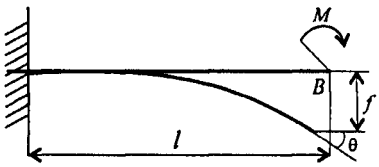
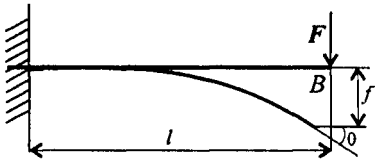
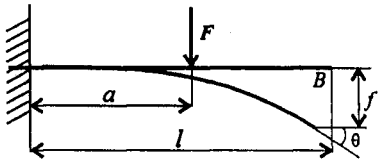
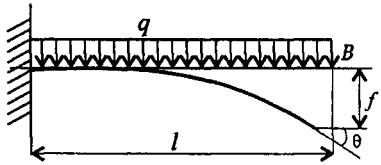
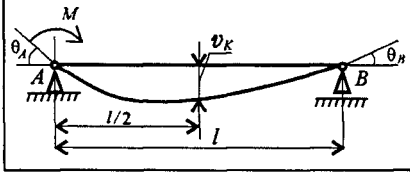
Ограничение угла поворота вводится для обеспечения нормальной работы подшипников скольжения и роликовых подшипников.

В этом случае проверяется дополнительное условие жесткости:

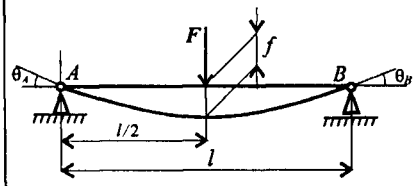
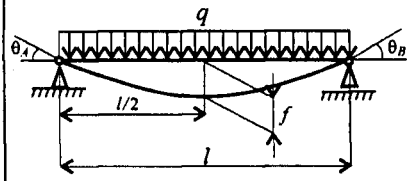
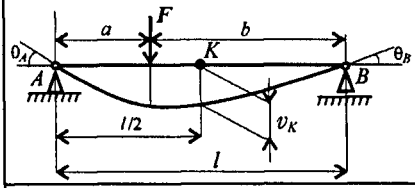
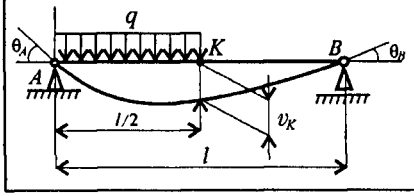
$$\theta_{\max} \leqslant [\theta].$$

Формулы для определения прогибов и углов поворота сечений балок

Таблица 33.1

Схема нагружения балки	Максимальный прогиб f и прогиб v_K в сечении K	Угол поворота θ указанного сечения
	$f = \dfrac{Ml^2}{2EJ_x}$	$\theta_B = \dfrac{Ml}{EJ_x}$
	$f = \dfrac{Fl^3}{3EJ_x}$	$\theta_B = \dfrac{Fl^2}{2EJ_x}$
	$f = \dfrac{Fa^2}{2EJ_x}\left(l - \dfrac{a}{3}\right)$	$\theta_B = \dfrac{Fa^2}{2EJ_x}$
	$f = \dfrac{ql^4}{8EJ_x}$	$\theta_B = \dfrac{ql^3}{6EJ_x}$
	$v_K = \dfrac{Ml^2}{16EJ_x}$	$\theta_A = \dfrac{Ml}{3EJ_x}$ $\theta_B = \dfrac{Ml}{6EJ_x}$

Продолжение табл. 33.1

Схема нагружения балки	Максимальный прогиб f и прогиб v_K в сечении K	Угол поворота θ указанного сечения
	$f = \dfrac{Fl^3}{48E\mathcal{J}_x}$	$\theta_A = \theta_B = \dfrac{Fl^2}{16E\mathcal{J}_x}$
	$f = \dfrac{5ql^4}{384E\mathcal{J}_x}$	$\theta_A = \theta_B = \dfrac{ql^3}{24E\mathcal{J}_x}$
	$v_K = \dfrac{Fa}{48E\mathcal{J}_x} \times$ $\times\,(3l^2 - 4a^2)$	$\theta_A = \dfrac{Fab(l+b)}{6E\mathcal{J}_x l}$ $\theta_B = \dfrac{Fab(l+a)}{6E\mathcal{J}_x l}$
	$v_K = \dfrac{5ql^4}{768E\mathcal{J}_x}$	$\theta_A = \dfrac{3ql^3}{128E\mathcal{J}_x}$ $\theta_B = \dfrac{7ql^3}{348E\mathcal{J}_x}$

Примеры решения задач

Проверить жесткость двутавровой балки (рис. 33.7). Принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[f] = \dfrac{1}{200}l$. Сечение балки — двутавр № 45.

Решение

Используем принцип независимости действия сил. По приведен-

ным в таблице формулам рассчитываем прогиб балки в точке от каждого вида нагружения отдельно (рис. 33.7 (1, 2, 3)).

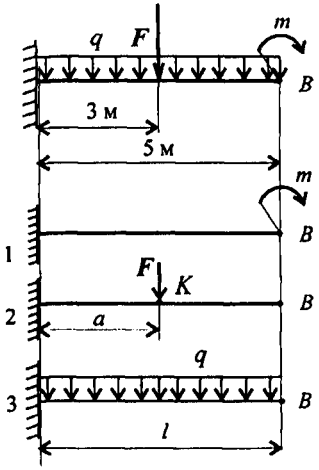


Рис. 33.7

Поскольку все действующие нагрузки прогибают балку вниз, результаты действия нагрузок можно сложить. Полученный суммарный прогиб сравним с допускаемым прогибом.

Допускаемый прогиб $[f] = \dfrac{5000}{200} = 25$ мм.

Суммарный прогиб

$$f_\Sigma = f_{1B} + f_{2B} + f_{3B};$$

$$f_\Sigma = \frac{Ml^2}{2E\mathcal{J}_x} + \frac{Fa^2(l - a/3)}{2E\mathcal{J}_x} + \frac{ql^4}{8E\mathcal{J}_x}.$$

Исходные данные:

$m = 12\,\text{кН}\cdot\text{м} = 12\cdot 10^6\,\text{Н}\cdot\text{м}$;

$a = 3\,\text{м} = 3\cdot 10^3\,\text{мм}$;

$F = 40\,\text{кН} = 40\cdot 10^3\,\text{Н}$;

$q = 4\,\text{кН/ м} = 4\,\text{Н/мм}$; $l = 5\,\text{м} = 5\cdot 10^3\,\text{мм}$.

Для двутавра № 45 ГОСТ 8239–89

$\mathcal{J}_x = 27696\,\text{см}^4 \cong 27{,}7\cdot 10^7\,\text{мм}^4$.

Тогда

$$f_{1B} = \frac{12\cdot 10^6\cdot 5^2\cdot 10^6}{2\cdot 2\cdot 10^5\cdot 27{,}7\cdot 10^7} = 2{,}7\,\text{мм};$$

$$f_{2B} = \frac{40\cdot 10^3\cdot 3^2\cdot 10^6\cdot 10^3}{2\cdot 2\cdot 10^5\cdot 27{,}7\cdot 10^7}\cdot\left(5 - \frac{3}{3}\right) = 12{,}99\,\text{мм};$$

$$f_{3B} = \frac{4\cdot 5^4\cdot 10^{12}}{8\cdot 2\cdot 10^5\cdot 27{,}7\cdot 10^7} = 5{,}64\,\text{мм};$$

$$f_\Sigma = 2{,}7 + 12{,}99 + 5{,}64 = 21{,}33\,\text{мм}.$$

$21{,}33 < 25$ — условие жесткости выполняется.

Максимальный прогиб не превышает допускаемого значения.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие внутренние силовые факторы возникают в сечении балки при чистом и поперечном изгибах?

2. Почему при поперечном изгибе в продольных сечениях балки возникают касательные напряжения?

3. Каким опытом можно подтвердить возникновение касательных напряжений в продольных сечениях балки?

4. В какой точке поперечного сечения (рис. 33.8) касательные напряжения при поперечном изгибе максимальны?

Варианты ответов:

1. *A*. 2. *B*. 3. *C*. 4. *D*.

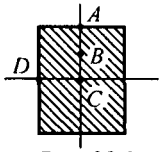


Рис. 33.8

5. Выберите верную эпюру распределения нормальных напряжений при изгибе (рис. 33.9). Напишите формулу для расчета нормальных напряжений при изгибе. Изгибающий момент действует в вертикальной плоскости.

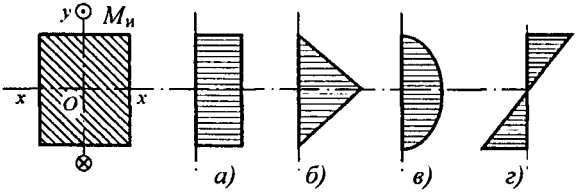


Рис. 33.9

6. Как изменится максимальное нормальное напряжение в сечении (рис. 33.10а), если балку прямоугольного сечения положить плашмя (рис. 33.10б)? $b = 20$ мм; $h = 100$ мм.

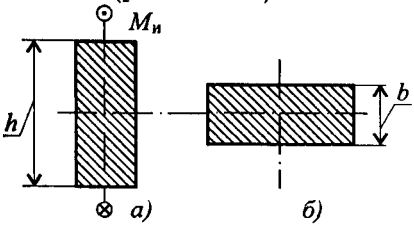


Рис. 33.10

7. Во сколько раз увеличится прогиб балки, если распределенную по всей длине нагрузку заменить сосредоточенной, приложенной в середине пролета? Использовать формулы для определения прогибов, приведенные в таблице 33.1.

ЛЕКЦИЯ 34

Тема 2.7. Сочетание основных деформаций. Гипотезы прочности

Иметь представление о напряженном состоянии в точке упругого тела, о теории предельных напряженных состояний, об эквивалентном напряженном состоянии, о гипотезах прочности.

Знать формулы для эквивалентных напряжений по гипотезам наибольших касательных напряжений и энергии формоизменения.

Напряженное состояние в точке

Напряженное состояние в точке характеризуется нормальными и касательными напряжениями, возникающими на всех площадках (сечениях), проходящих через данную точку. Обычно достаточно определить напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через рассматриваемую точку. Точку принято изображать в виде маленького элемента в форме параллелепипеда (рис. 34.1).

Положения теории напряженного состояния:

1. Напряженное состояние в данной точке полностью определено, если известны напряжения по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам.

2. Среди множества площадок, которые можно провести через данную точку, есть три такие взаимно перпендикулярные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, эти площадки называются *главными*, а нормальные напряжения, возникающие на них, называются *главными напряжениями*: σ_1; σ_2; σ_3 (рис. 34.1).

Одно из этих напряжений — максимально, одно — минимально. Максимальное обозначают σ_1, минимальное — σ_3.

Классификация видов напряженного состояния производится по главным напряжениям:

— если все три главных напряжения не равны нулю, то напряженное состояние называют *объемным* (трехосным) (рис. 34.1а);

— если одно из главных напряжений равно нулю, напряженное состояние называют *плоским* (двухосным) (рис. 34.1б);

— если два из главных напряжений ($\sigma_2 = 0$) противоположны

по знаку, напряженное состояние называют *упрощенным плоским* состоянием;

— если лишь одно из главных напряжений не равно нулю, напряженное состояние *линейное* (рис. 34.1в).

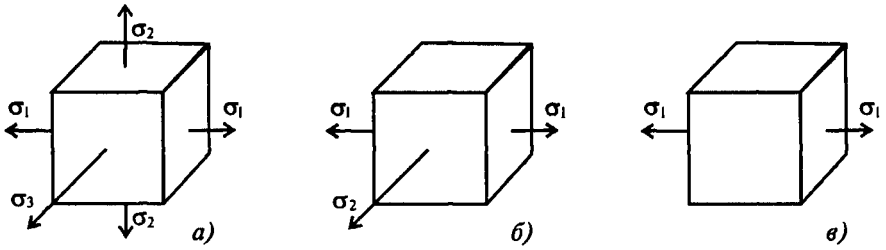


Рис. 34.1

Понятие о сложном деформированном состоянии

Совокупность деформаций, возникающих по различным направлениям и в различных плоскостях, проходящих через точку, определяют *деформированное состояние* в этой точке.

Сложное деформированное состояние возникает, если деталь одновременно подвергается нескольким простейшим нагружениям.

Такие состояния возникают в заклепочных соединениях (срез и смятие), в болтовых соединениях (растяжение и скручивание), при поперечном изгибе бруса (изгиб и сдвиг).

Часто одним из нагружений (незначительным) пренебрегают.

Например, длинные балки рассчитывают только на изгиб.

В ряде случаев нормальные и касательные напряжения, возникающие в детали, имеют одинаковый порядок и ими нельзя пренебрегать. Тогда расчет проводят при сложном деформированном состоянии.

Сложность расчета заключается в отсутствии экспериментальных данных о предельных напряжениях, т. к. провести испытания из-за множества вариантов нагружения практически невозможно.

Для упрощения расчетов в этом случае применяют *теории прочности*. Смысл теорий заключается в *замене реального сложного деформированного состояния равноопасным простым.*

Опасное состояние может быть вызвано различными факторами: *нормальные* напряжения могут достигнуть предела текучести

или предела прочности, *касательные* напряжения могут достигнуть опасного значения или *накопленная энергия деформирования* может стать слишком большой и вызвать разрушение.

Универсального критерия, позволяющего рассчитать предельное состояние для любого материала, *нет*. Разработано несколько различных гипотез *предельных состояний*, при расчетах используют наиболее подходящую гипотезу. Расчеты по гипотезам прочности позволяют избегать дорогостоящих испытаний конструкции.

В настоящее время для расчета валов при совместном действии изгиба и кручения используют только третью и пятую теории прочности.

Сравнение разнотипных состояний производится с помощью эквивалентного (простого) напряженного состояния. Обычно сложное напряженное состояние заменяют простым растяжением (рис. 34.2).

Расчетное напряжение, соответствующее выбранному одноосному растяжению, называют *эквивалентным* напряжением (рис. 34.2б).

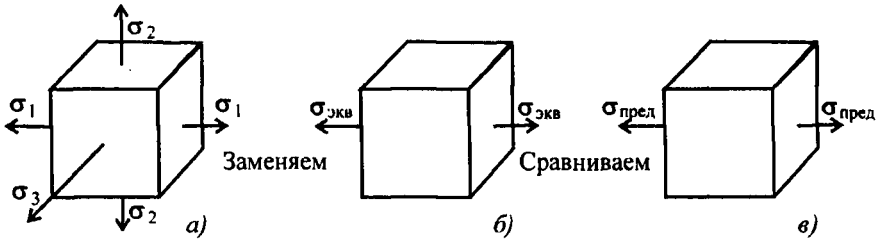


Рис. 34.2

Полученное расчетным путем эквивалентное *напряжение для точки* сравнивают с *предельным* (рис. 34.2в).

Напряженное состояние в *точке равноопасно эквивалентному напряженному состоянию*. Условие прочности получим, сопоставив эквивалентное напряжение с предельным, полученным экспериментально для выбранного материала: $\sigma_{\text{экв}} \leqslant \dfrac{\sigma_{\text{пред}}}{[s]}$, где $[s]$ — допускаемый запас прочности.

Как известно, предельным напряжением для пластичных материалов является предел текучести $\sigma_{\text{т}}$, а для хрупкого — предел прочности $\sigma_{\text{в}}$. Предельное напряженное состояние у пластичных матери-

алов наступает в результате пластических деформаций, а у хрупких — в результате разрушения.

Для пластичных материалов расчет может выполняться по *гипотезе максимальных касательных напряжений: два напряженных состояния равноопасны, если максимальные касательные напряжения у них одинаковы* (третья теория прочности).

Расчет можно проводить и по теории *потенциальной энергии формоизменения: два напряженных состояния равноопасны, если энергия формоизменения у них одинакова* (пятая теорема прочности).

Для хрупких и хрупко-пластичных материалов применяют теорию прочности Мора.

Расчет эквивалентного напряжения для точки по теории максимальных касательных напряжений выполняется по формуле

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

а по теории энергии формоизменения по формуле

$$\sigma_{\text{экв V}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2},$$

где σ — действующее в точке нормальное напряжение; τ — действующее в точке касательное напряжение.

Расчет круглого бруса на изгиб с кручением

В случае расчета круглого бруса при действии изгиба и кручения (рис. 34.3) необходимо учитывать нормальные и касательные напряжения, т. к. максимальные значения напряжений в обоих случаях возникают на поверхности. Расчет следует вести по теории прочности, заменяя сложное напряженное состояние равноопасным простым.

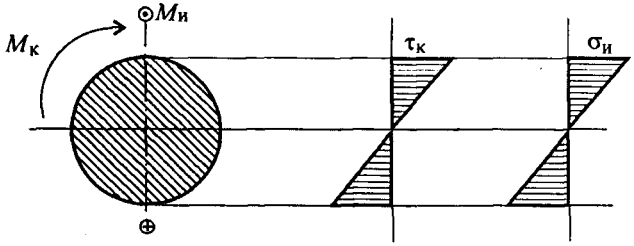


Рис. 34.3

Максимальное напряжение кручения в сечении $\tau_к = \dfrac{M_к}{W_p}$.

Максимальное напряжение изгиба в сечении $\sigma_и = \dfrac{M_и}{W_x}$.

По одной из теорий прочности в зависимости от материала бруса рассчитывают эквивалентное напряжение для опасного сечения и проверяют брус на прочность, используя допускаемое напряжение изгиба для материала бруса.

Для круглого бруса моменты сопротивления сечения следующие:

при кручении $\quad W_p = \dfrac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2d^3; \quad W_x = \dfrac{W_p}{2};$

при изгибе $\quad W_x = \dfrac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1d^3.$

При расчете по третьей теории прочности, теории максимальных касательных напряжений, эквивалентное напряжение рассчитывается по формуле

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sqrt{\sigma_и^2 + 4\tau_к^2}.$$

Теория применима для пластичных материалов.

При расчете по теории энергии формоизменения эквивалентное напряжение рассчитывается по формуле

$$\sigma_{\text{экв V}} = \sqrt{\sigma_и^2 + 3\tau_к^2}.$$

Теория применима для пластичных и хрупких материалов.

Эквивалентное напряжение при расчете по *теории максимальных касательных напряжений*:

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sqrt{\left(\frac{M_и}{W_x}\right)^2 + 4\left(\frac{M_к}{2W_x}\right)^2} = \sqrt{\frac{M_и^2 + M_к^2}{W_x^2}}. \quad \sigma_{\text{экв III}} = \frac{M_{\text{экв III}}}{W_x},$$

где $M_{\text{экв III}} = \sqrt{M_и^2 + M_к^2}$ — эквивалентный момент.

Условие прочности:

$$\sigma_{\text{экв III}} = \frac{M_{\text{экв III}}}{W_x} \leqslant [\sigma].$$

Эквивалентное напряжение при расчете по *теории энергии формоизменения*:

$$\sigma_{\text{экв V}} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{и}}}{W_x}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{M_{\text{к}}}{W_x}\right)^2}; \quad \sigma_{\text{экв V}} = \frac{M_{\text{экв V}}}{W_x},$$

где $M_{\text{экв V}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0{,}75M_{\text{к}}^2}$ — эквивалентный момент.

Условие прочности:

$$\sigma_{\text{экв V}} = \frac{M_{\text{экв V}}}{W_x} \leqslant [\sigma].$$

Примеры решения задач

Для заданного напряженного состояния (рис. 34.4), пользуясь гипотезой максимальных касательных напряжений, вычислить коэффициент запаса прочности, если $\sigma_{\text{т}} = 360$ Н/мм^2.

Решение

$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$.

$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{20^2 + 4 \cdot 120^2} = 240{,}8$ Н/мм^2.

$s = \sigma_{\text{т}}/\sigma_{\text{экв}} = 360/240{,}8 \cong 1{,}5$,

s — коэффициент запаса прочности.

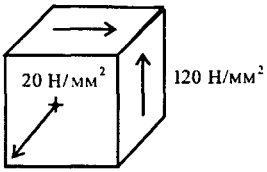


Рис. 34.4

Контрольные вопросы и задания

1. Чем характеризуется и как изображается напряженное состояние в точке?
2. Какие площадки и какие напряжения называют главными?
3. Перечислите виды напряженных состояний.
4. Чем характеризуется деформированное состояние в точке?
5. В каких случаях возникают предельные напряженные состояния у пластичных и хрупких материалов?
6. Что такое эквивалентное напряжение?
7. Поясните назначение теорий прочности.
8. Напишите формулы для расчета эквивалентных напряжений при расчетах по теории максимальных касательных напряжений и теории энергии формоизменения. Поясните, как ими пользоваться.

ЛЕКЦИЯ 35

Тема 2.7. Расчет бруса круглого поперечного сечения при сочетании основных деформаций

Знать формулы для эквивалентных напряжений по гипотезам наибольших касательных напряжений и энергии формоизменения.

Уметь рассчитывать брус круглого поперечного сечения на прочность при сочетании основных деформаций.

Формулы для расчета эквивалентных напряжений

Эквивалентное напряжение по гипотезе максимальных касательных напряжений

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Эквивалентное напряжение по гипотезе энергии формоизменения

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2},$$

где $\tau = M_{\text{к}}/W_p$ — расчетное касательное напряжение;

$\sigma = M_{\text{и}}/W_x$ — расчетное нормальное напряжение.

Условие прочности при совместном действии изгиба и кручения

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_x} \leqslant [\sigma],$$

где $M_{\text{экв}}$ — эквивалентный момент.

Эквивалентный момент по гипотезе максимальных касательных напряжений

$$M_{\text{экв III}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2}.$$

Эквивалентный момент по гипотезе энергии формоизменения

$$M_{\text{экв V}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0{,}75M_{\text{к}}^2}.$$

Особенность расчета валов

Большинство валов испытывают сочетание деформаций изгиба и кручения. Обычно валы — прямые брусья с круглым или кольцевым сечением. При расчете валов касательные напряжения от действия поперечных сил не учитывают из-за их незначительности.

Расчеты проводят по опасным поперечным сечениям. При пространственном нагружении вала пользуются гипотезой независимости действия сил и изгибающие моменты рассматривают в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, а суммарный изгибающий момент определяют геометрическим суммированием.

Примеры решения задач

Пример 1. В опасном поперечном сечении круглого бруса возникают внутренние силовые факторы (рис. 35.1) M_x; M_y; M_z.

M_x и M_y — изгибающие моменты в плоскостях yOz и zOx соответственно; M_z — крутящий момент. Проверить прочность по гипотезе наибольших касательных напряжений, если $[\sigma] = 120$ МПа. Исходные данные: $M_x = 0{,}9$ кН · м; $M_y = 0{,}8$ кН · м; $M_z = 2{,}2$ кН · м; $d = 60$ мм.

Решение

Строим эпюры нормальных напряжений от действия изгибающих моментов относительно осей Ox и Oy и эпюру касательных напряжений от кручения (рис. 35.2).

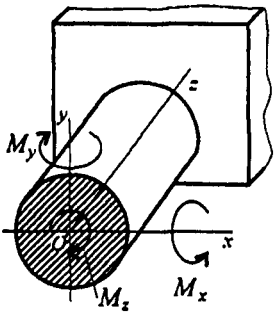


Рис. 35.1

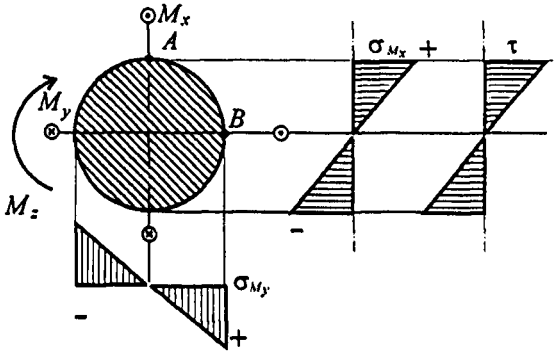


Рис. 35.2

Максимальное касательное напряжение возникает на поверхности. Максимальные нормальные напряжения от момента M_x возникают в точке A, максимальные нормальные напряжения от момента M_y в точке B. Нормальные напряжения складываются, потому что изгибающие моменты во взаимно перпендикулярных плоскостях гео-

метрически суммируются.

Суммарный изгибающий момент: $M_и = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$;

$M_и = \sqrt{0{,}9^2 + 0{,}8^2} = 1{,}2\,кН \cdot м$.

Рассчитываем эквивалентный момент по теории максимальных касательных напряжений:

$$M_{экв\ III} = \sqrt{M_и^2 + M_к^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 2{,}2^2} = 2{,}5\,кН \cdot м.$$

Условие прочности: $\sigma_{экв} = \dfrac{M_{экв}}{W_{осевое}} \leqslant [\sigma]$; $W_{осевое} = W_x = W_y$.

Момент сопротивления сечения: $W_{осевое} = 0{,}1 \cdot 60^3 = 21\,600\,мм^3$.

Проверяем прочность: $\sigma_{экв} = \dfrac{2{,}5 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{21\,600} = 115{,}7\,МПа < 120\,МПа$.

Прочность обеспечена.

Пример 2. Из условия прочности рассчитать необходимый диаметр вала. На валу установлены два колеса. На колеса действуют две окружные силы $F_{t_1} = 1{,}2\,кН$; $F_{t_2} = 2\,кН$ и две радиальные силы в вертикальной плоскости $F_{r_1} = 0{,}43\,кН$; $F_{r_2} = 0{,}72\,кН$ (рис. 35.3). Диаметры колес соответственно равны $d_1 = 0{,}1\,м$; $d_2 = 0{,}06\,м$.

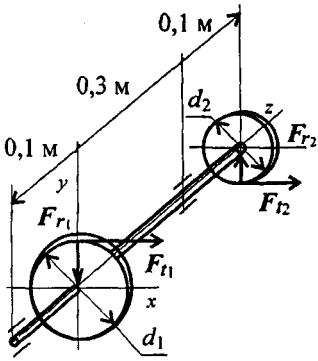


Рис. 35.3

Принять для материала вала $[\sigma] = 50\,МПа$.

Рассчитать размеры вала кольцевого сечения при $c = 0{,}8$ ($c = \dfrac{d_{вн}}{d}$). Расчет провести по гипотезе максимальных касательных напряжений. Весом вала и колес пренебречь.

Решение

Указание. Используем принцип независимости действия сил, составляем расчетные схемы вала в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Определяем реакции в опорах в горизонтальной и вертикальной плоскостях в отдельности. Строим эпюры изгибающих моментов (рис. 35.4). Под действием окружных сил вал скручивается. Определяем действующий на валу крутящий момент.

Составим расчетную схему вала (рис. 35.4).

1. Крутящий момент на валу:

$$M_к = M_{вр} = F_{t_1}\frac{d_1}{2} = F_{t_2}\frac{d_2}{2};$$

$$M_к = 1{,}2 \cdot \frac{0{,}1}{2} = 0{,}06\,кН \cdot м = 60\,Н \cdot м.$$

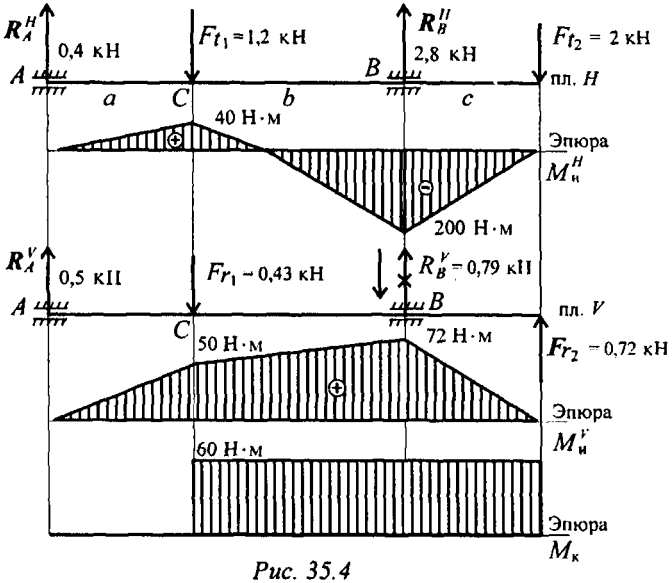


Рис. 35.4

2. Изгиб рассматриваем в двух плоскостях: горизонтальной (пл. H) и вертикальной (пл. V).

В горизонтальной плоскости определяем реакции в опоре:

$$\sum m_A^H = F_{t_1}a - R_B^H(a+b) + F_{t_2}(a+b+c) = 0;$$

$$1{,}2 \cdot 0{,}1 - R_B^H \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}5 = 0; \quad R_B^H = 2{,}8\,кН.$$

$$\sum m_B^H = R_A^H(a+b) - F_{t_1}b + F_{t_2}c = 0;$$

$$R_A^H \cdot 0{,}4 - 1{,}2 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}1 = 0; \quad R_A^H = 0{,}4\,кН.$$

Определяем изгибающие моменты в точках C и B:

$$M_C^H = 400 \cdot 0{,}1 = 40\,\text{Н} \cdot \text{м}; \quad M_B^H = -2000 \cdot 0{,}1 = 200\,\text{Н} \cdot \text{м}.$$

В вертикальной плоскости определяем реакции в опоре:

$$\sum m_A^V = F_{r_1} a - R_B^V (a+b) - F_{r_2}(a+b+c) = 0;$$

$$-R_B^V \cdot 0{,}4 + 0{,}43 \cdot 0{,}1 - 0{,}72 \cdot 0{,}5 = 0; \quad R_B^V = -0{,}79\,\text{кН}.$$

$$\sum m_B^V = R_A^V (a+b) - F_{r_1} b - F_{r_2} C = 0;$$

$$R_A^V \cdot 0{,}4 - 0{,}43 \cdot 0{,}3 - 0{,}72 \cdot 0{,}1 = 0; \quad R_A^V = 0{,}5\,\text{кН}.$$

Определяем изгибающие моменты в точках C и B:

$$M_C^V = R_A^V a; \quad M_C^V = 500 \cdot 0{,}1 = 50\,\text{Н} \cdot \text{м}.$$

$$M_B^V = F_{r_2} c; \quad M_B^V = 720 \cdot 0{,}1 = 72\,\text{Н} \cdot \text{м}.$$

Суммарные изгибающие моменты в точках C и B:

$$M_C = \sqrt{(M_C^H)^2 + (M_C^V)^2}; \quad M_C = \sqrt{40^2 + 50^2} = 63\,\text{Н} \cdot \text{м}.$$

$$M_B = \sqrt{(M_B^H)^2 + (M_B^V)^2}; \quad M_B = \sqrt{(200)^2 + (72)^2} = 215\,\text{Н} \cdot \text{м}.$$

В точке B максимальный изгибающий момент, здесь же действует и крутящий момент.

Расчет диаметра вала ведем по наиболее нагруженному сечению.

3. Эквивалентный момент в точке B по третьей теории прочности

$$M_{\text{экв III}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2}; \quad M_{\text{экв III}} = \sqrt{215^2 + 60^2} \cong 223\,\text{Н} \cdot \text{м}.$$

4. Определяем диаметр вала круглого поперечного сечения из условия прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_x} \leqslant [\sigma]; \quad W_x \cong 0{,}1 d^3; \quad \frac{M_{\text{экв}}}{0{,}1 d^3} \leqslant [\sigma];$$

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{M_{\text{экв}}}{0{,}1[\sigma]}}; \quad d \geqslant \sqrt[3]{\frac{223 \cdot 10^3}{0{,}1 \cdot 50}} = 35{,}5\,\text{мм}.$$

Округляем полученную величину: $d = 36$ мм.

Примечание. При выборе диаметров вала пользоваться стандартным рядом диаметров (Приложение 2).

5. Определяем необходимые размеры вала кольцевого сечения при $c = 0{,}8$; $c = \dfrac{d_{\text{вн}}}{d}$, где d — наружный диаметр вала.

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{0{,}1 d^3 (1 - c^4)} \leqslant [\sigma];$$

$$W_x = 0{,}1d^3(1-c^4) \quad \text{(кольцо)}; \quad d \geqslant \sqrt[3]{\frac{M_{\text{экв}}}{0{,}1(1-c^4)[\sigma]}}.$$

Диаметр вала кольцевого сечения можно определить по формуле

$$\frac{d_{\text{круг}}}{d_{\text{кольцо}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-c^4}}; \quad d_{\text{кольцо}} = d_{\text{круг}}\sqrt[3]{1-c^4};$$

$$d_{\text{кольцо}} = 36\sqrt[3]{1-0{,}8^4}; \quad d \geqslant 42{,}5\,\text{мм}.$$

Примем $d = 42$ мм.

Перегрузка незначительная. $d_{\text{вн}} = 0{,}8d = 0{,}8 \cdot 42 = 33{,}6$ мм.

Округляем до значения $d_{\text{вн}} = 33$ мм.

6. Сравним затраты металла по площадям сечения вала в обоих случаях.

Площадь поперечного сечения сплошного вала

$$A_{\text{круга}_1} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 36^2}{4} \cong 1018\,\text{мм}^2.$$

Площадь поперечного сечения полого вала

$$A_{\text{кольца}_2} = \frac{\pi}{4}(d^2 - d^2_{\text{внутр}}); \quad A_{\text{кольца}_2} = \frac{3{,}14(42^2 - 33^2)}{4} = 530\,\text{мм}^2.$$

Площадь поперечного сечения сплошного вала почти в два раза больше вала кольцевого сечения:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1018}{530} \approx 2.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какое напряженное состояние возникает в поперечном сечении вала при совместном действии изгиба и кручения?

2. Напишите условие прочности для расчета вала.

3. Напишите формулы для расчета эквивалентного момента при расчете по гипотезе максимальных касательных напряжений и гипотезе энергии формоизменения.

4. Как выбирается опасное сечение при расчете вала?

ЛЕКЦИЯ 36

Тема 2.10. Устойчивость сжатых стержней. Основные положения

Иметь представление об устойчивых и неустойчивых формах равновесия, критической силе и коэффициенте запаса устойчивости, о критическом напряжении, гибкости стержня и предельной гибкости.

Знать условие устойчивости сжатых стержней, формулу Эйлера и эмпирические формулы для расчета критической силы и критического напряжения.

Понятие об устойчивом и неустойчивом равновесии

Относительно короткие и массивные стержни рассчитывают на сжатие, т. к. они выходят из строя в результате разрушения или остаточных деформаций. Длинные стержни небольшого поперечного сечения под действием осевых сжимающих сил изгибаются и теряют равновесие. Такие стержни работают на изгиб и сжатие.

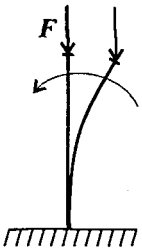


Рис. 36.1

Равновесие считают устойчивым, если за счет сил упругости после снятия внешней отклоняющей силы стержень восстановит первоначальную форму (рис. 36.1).

Если упругое тело после отклонения от равновесного положения не возвращается к исходному состоянию, то говорят, что произошла потеря устойчивости, а равновесие было неустойчивым.

Потерю устойчивости под действием центрально приложенной продольной сжимающей силы называют *продольным изгибом.*

На устойчивость равновесия влияет величина сжимающей силы.

Наибольшее значение сжимающей силы, при которой прямолинейная форма стержня сохраняет устойчивость, называют *критической силой.* Даже при небольшом превышении критического значения силы стержень недопустимо деформируется и разрушается.

Расчет на устойчивость

Расчет на устойчивость заключается в определении допускаемой сжимающей силы и в сравнении с ней силы действующей:

$$F \leqslant [F]; \quad [F] = \frac{F_{\text{кр}}}{[s_y]}; \quad F \leqslant \frac{F_{\text{кр}}}{[s_y]},$$

где F — действующая сжимающая сила;

$[F]$ — допускаемая сжимающая сила, обеспечивает некоторый запас устойчивости;

$F_{\text{кр}}$ — критическая сила;

$[s_y]$ — допускаемый коэффициент запаса устойчивости.

Обычно для сталей $[s_y] = 1{,}8 \div 3$; для чугуна $[s_y] = 5$; для дерева $[s_y] \approx 2{,}8$.

Способы определения критической силы

Расчет по формуле Эйлера

Задачу определения критической силы математически решил Л. Эйлер в 1744 г.

Для шарнирно закрепленного с обеих сторон стержня (рис. 36.2) формула Эйлера имеет вид

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E \mathcal{J}_{\min}}{l^2},$$

где E — модуль упругости;

$\mathcal{J}_{\min}$ — минимальный осевой момент инерции стержня;

l — длина стержня.

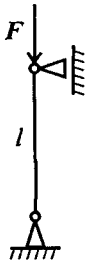


Рис. 36.2

Потеря устойчивости происходит *в плоскости наименьшей жесткости*, поэтому в формулу входит минимальный из осевых моментов инерции сечения ($\mathcal{J}_x$ или $\mathcal{J}_y$).

Формулу распространили на другие формы закрепления стержней, рассмотрев форму потери устойчивости в каждом случае.

Длина стержня заменяется ее приведенным значением, учитывающим форму потери устойчивости в каждом случае: $l_{\text{прив}} = \mu l$, где μ — коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления стержня (рис. 36.3).

Формула для расчета критической силы для всех случаев

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E \mathcal{J}_{\min}}{(\mu l)^2}.$$

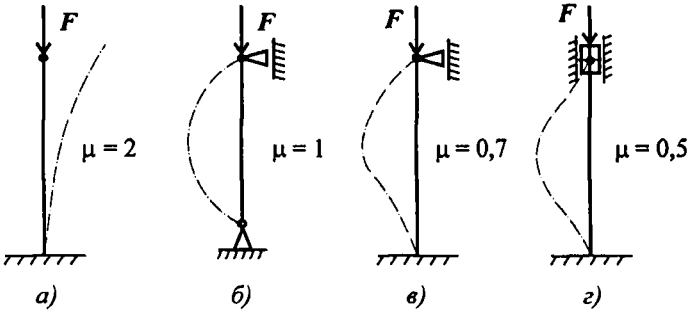


Рис. 36.3

Критические напряжения.

Критическое напряжение — напряжение сжатия, соответствующее критической силе.

Напряжение от сжимающей силы определяется по формуле

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \frac{\pi^2 E \mathcal{J}_{\min}}{(\mu l)^2 A},$$

где $\sigma_{\text{кр}}$ — напряжение сжатия, при котором стержень еще устойчив. Корень квадратный из отношения минимального момента инерции сечения к площади поперечного сечения принято называть *минимальным радиусом инерции* $i_{\min}$:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{\mathcal{J}_{\min}}{A}}; \quad \frac{\mathcal{J}_{\min}}{A} = i_{\min}^2.$$

Тогда формула для расчета критического напряжения перепишется в виде

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2}.$$

Отношение $\mu l / i_{\min}$ носит название *гибкости стержня* λ.

Гибкость стержня — величина безразмерная, чем больше гибкость, тем меньше напряжение:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}. \qquad \sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Заметим, что гибкость не зависит от материала, а определяется только геометрией стержня.

Пределы применимости формулы Эйлера

Формула Эйлера выполняется только в пределах упругих деформаций.

Таким образом, *критическое напряжение должно быть меньше предела упругости материала.*

Предел упругости при расчетах можно заменять пределом пропорциональности. Таким образом, $\sigma_{\text{кр}} \leqslant \sigma_{\text{у}} \approx \sigma_{\text{пц}}$, где $\sigma_{\text{у}}$ — предел упругости; $\sigma_{\text{пц}}$ — предел пропорциональности материала;

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leqslant \sigma_{\text{пц}}. \quad \text{Откуда гибкость стержня: } \lambda \geqslant \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}};$$

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} \text{ — предельная гибкость.}$$

Предельная гибкость зависит от материала стержня.

В случае, если $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ в материале стержня возникают остаточные деформации. Поскольку в реальных конструкциях могут возникать пластические деформации, не приводящие к потере работоспособности, созданы эмпирические формулы для расчетов в этих случаях.

Расчет критического напряжения по формуле Ф. О. Ясинского для стальных стержней

Таблица 36.1

Материал	a, МПа	b, МПа	λ_0	$\lambda_{\text{пред}}$
Сталь Ст2	264	0,70	60	105
Сталь Ст3	310	1,14	60	100
Сталь 20, Ст4	328	1, 15	60	96
Сталь 45	449	1,67	52	85
Дюралюмин Д16Т	406	1, 83	30	53
Сосна, ель	29,3	0,194	—	70

Критическое напряжение определяется по формуле $\sigma_{кр} = a - b\lambda$, где a и b — коэффициенты, зависящие от материала; их значения представлены в таблице.

На рис. 36.4 представлена зависимость критического напряжения от гибкости стержня.

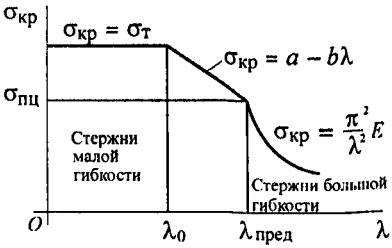


Рис. 36.4

Для стержней малой гибкости проводится расчет на сжатие $\sigma_{сж} \leqslant [\sigma]_{сж}$. Для стержней средней гибкости расчет проводят по формуле Ясинского $\sigma_{кр} = a - b\lambda$.

Для стержней большой гибкости расчет проводят по формуле Эйлера $\sigma_{кр} = \pi^2 E/\lambda^2$.

Критическую силу при расчете критического напряжения по формуле Ясинского можно определить как

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A = (a - b\lambda)A.$$

Условие устойчивости: $F \leqslant \dfrac{F_{кр}}{[s_y]}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какое равновесие называется устойчивым?
2. Какие брусья следует рассчитывать на устойчивость?
3. Какую силу при расчете на устойчивость называют критической?
4. Напишите формулу Эйлера для расчета критической силы и назовите входящие величины и их единицы измерения.
5. Что называют гибкостью стержня, какой смысл заложен в этом названии? Назовите категории стержней в зависимости от гибкости.
6. От каких параметров стержня зависит предельная гибкость?
7. При каких условиях можно использовать формулу Эйлера для расчета критической силы?
8. В чем заключается расчет сжатого стержня на устойчивость? Напишите условие устойчивости. Чем отличается допускаемая сжимающая сила от критической?

ЛЕКЦИЯ 37

Тема 2.10. Устойчивость сжатых стержней. Расчеты на устойчивость

Знать условие устойчивости сжатых стержней, формулы Эйлера для определения критической силы, эмпирические формулы для расчетов критического напряжения и критической силы.

Уметь выполнять проверочные расчеты на устойчивость сжатых стержней.

Порядок выполнения расчета на устойчивость

1. Получение сведений о материале стержня для определения предельной гибкости стержня расчетным путем или по таблице:

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}.$$

2. Получение сведений о геометрических размерах поперечного сечения, длине и способах закрепления концов для определения категории стержня в зависимости от гибкости:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{\mathcal{J}_{\min}}{A}},$$

где A — площадь сечения; $\mathcal{J}_{\min}$— минимальный момент инерции (из осевых);

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}},$$

μ — коэффициент приведенной длины.

3. Выбор расчетных формул для определения критической силы и критического напряжения.

При $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{\text{пред}}$ — расчет по эмпирическим формулам.

При $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$ — расчет по формуле Эйлера.

4. Проверка и обеспечение устойчивости.

При расчете по формуле Эйлера условие устойчивости:

$$F \leqslant \frac{F_{\text{кр}}}{[s_y]}; \quad F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E \mathcal{J}_{\min}}{(\mu l)^2},$$

F — действующая сжимающая сила; $[s_y]$ — допускаемый коэффициент запаса устойчивости.

При расчете по формуле Ясинского $\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda$, где a, b — расчетные коэффициенты, зависящие от материала (величины коэффициентов приводятся в таблице 36.1)

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A; \quad F \leqslant \frac{F_{\text{кр}}}{[s_y]}.$$

В случае невыполнения условий устойчивости необходимо увеличить площадь поперечного сечения.

Иногда необходимо определить запас устойчивости при заданном нагружении:

$$s_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F}.$$

При проверке устойчивости сравнивают расчетный запас выносливости с допускаемым:

$$s_y \leqslant [s_y].$$

Примеры решения задач

Пример 1. Рассчитать гибкость стержня. Круглый стержень диаметром 20 мм закреплен так, как показано на рис. 37.1.

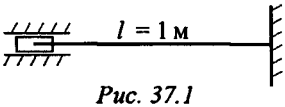


Рис. 37.1

Решение

1. Гибкость стержня определяется по формуле

$$\lambda = \mu l / i_{\min}.$$

2. Определяем минимальный радиус инерции для круга.

$$i_{\min} = \sqrt{\mathcal{J}_{\min}/A}.$$

Подставив выражения для $\mathcal{J}_{\min}$ и A (сечение — круг)

$$\mathcal{J}_{\min} = \frac{\pi d^4}{64}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4},$$

получим

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi d^2}} = \frac{d}{4}.$$

3. Коэффициент приведения длины для данной схемы крепления $\mu = 0{,}5$.

4. Гибкость стержня будет равна $\lambda = \dfrac{0{,}5 \cdot 1000}{5} = 100$.

Пример 2. Как изменится критическая сила для стержня, если изменить способ закрепления концов? Сравнить представленные схемы (рис. 37.2)

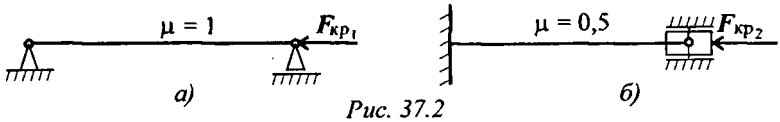


Рис. 37.2

Решение

$$\frac{F_{кр_1}}{F_{кр_2}} = \frac{\pi^2 E \mathcal{J}_{\min} (\mu_2 l)^2}{(\mu_1 l)^2 \pi^2 E \mathcal{J}_{\min}};$$

$$F_{кр_2} = F_{кр_1} \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}; \quad F_{кр_2} = F_{кр_1} \frac{1^2}{0{,}5^2}.$$

Критическая сила увеличится в 4 раза. $F_{кр_2} = 4F_{кр_1}$.

Пример 3. Как изменится критическая сила при расчете на устойчивость, если стержень двутаврового сечения (рис. 37.3а, двутавр № 12) заменить стержнем прямоугольного сечения той же площади (рис. 37.3б)? Остальные параметры конструкции не меняются. Расчет выполнить по формуле Эйлера.

Решение

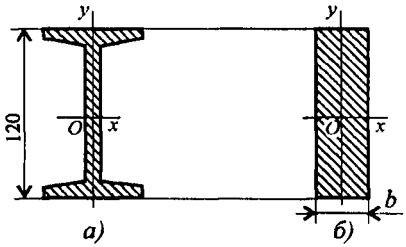


Рис. 37.3

1. Определим ширину сечения прямоугольника, высота сечения равна высоте сечения двутавра. Геометрические параметры двутавра № 12 по ГОСТ 8239–89 следующие:

площадь сечения $A_1 = 14{,}7\,\text{см}^2$;

минимальный из осевых моментов инерции $\mathcal{J}_y = 27{,}9\,\text{см}^4$.

По условию площадь прямоугольного сечения равна площади сечения двутавра. Определяем ширину полосы при высоте 12 см.

$$A_2 = bh = 14{,}7\,\text{см}^2; \quad b = \frac{14{,}7}{12} = 1{,}225\,\text{см}.$$

2. Определим минимальный из осевых моментов инерции.

$$\mathcal{J}_{\min_2} = \mathcal{J}_{y_2} = \frac{hb^3}{12}; \quad \mathcal{J}_{y_2} = \frac{12(1{,}225)^3}{12} = 1{,}84\,\text{см}^4.$$

3. Критическая сила определяется по формуле Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E \mathcal{J}_{\min}}{(\mu l)^2}.$$

4. При прочих равных условиях отношение критических сил равно отношению минимальных моментов инерции:

$$\frac{F_{\text{кр}_1}}{F_{\text{кр}_2}} = \frac{27{,}9}{1{,}84} \cong 15.$$

5. Таким образом, устойчивость стержня с сечением двутавр № 12 в 15 раз выше, чем устойчивость стержня выбранного прямоугольного сечения.

Пример 4. Проверить устойчивость стержня. Стержень длиной 1 м защемлен одним концом, сечение — швеллер № 16, материал — Ст3, запас устойчивости трехкратный. Стержень нагружен сжимающей силой 82 кН (рис. 37.4).

Решение

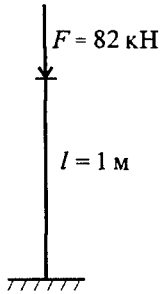


Рис. 37.4

1. Определяем основные геометрические параметры сечения стержня по ГОСТ 8240–89.

Швеллер № 16: площадь сечения 18,1 см^2; минимальный осевой момент сечения 63,3 см^4; минимальный радиус инерции сечения $i_{\min} = 1{,}87$ см.

2. Определяем категорию стержня в зависимости от гибкости.

Предельная гибкость для материала Ст3 $\lambda_{\text{пред}} = 100$.

Расчетная гибкость стержня при длине $l = 1$ м $= 1000$ мм

$$\lambda = \frac{2 \cdot 1000}{18{,}7} = 106{,}95.$$

Рассчитываемый стержень — стержень большой гибкости, расчет ведем по формуле Эйлера.

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E \mathcal{J}_{\min}}{(\mu l)^2}; \quad F_{\text{кр}} = \frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 63{,}3 \cdot 10^4}{(2 \cdot 1000)^2} = 312\,000\,\text{Н} = 312\,\text{кН}.$$

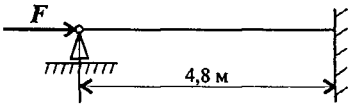
3. Допускаемая нагрузка на стержень $[F] = F_{\text{кр}}/[s_y]$.

$$[F_y] = \frac{312}{3} = 105{,}5\,\text{кН}.$$

4. Условие устойчивости $F \leqslant [F_y]$;

82 кН $<$ 105,5 кН. Устойчивость стержня обеспечена.

Тема 2.10. Устойчивость сжатых стержней

Вопросы	Ответы	Код
1. Выбрать верную запись условия устойчивости.	$F_{сж} \leqslant \sigma_{кр} A$	1
	$F_{сж} \leqslant \sigma_{сж} A$	2
	$F_{сж} \leqslant F_{кр}/[s_y]$	3
	$F_{сж} < F_{кр}$	4
2. Из приведенных характеристик материала выбрать характеристику, используемую при расчете на устойчивость.	$\sigma_т$	1
	$\sigma_в$	2
	HB	3
	E	4
3. Рассчитать гибкость стержня круглого поперечного сечения, если диаметр его 85 мм, длина 1,5 м, стержень шарнирно закреплен с обоих концов.	35,3	1
	70,6	2
	140,2	3
	162,4	4
4. По какой из формул необходимо рассчитывать на устойчивость стержень, описанный в вопросе 3, если материал стержня — сталь, предельная гибкость для которой 96.	$F_{кр} = \sigma_т A$	1
	$F_{кр} = (a - b\lambda)A$	2
	$F_{кр} = \dfrac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu l)^2}$	3
	$F_{кр} = \sigma_{сж} A$	4
5. Определить допускаемую нагрузку для стойки. Материал — сталь, поперечное сечение — швеллер № 20, запас устойчивости — 4. $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Формула Эйлера применима. 	197 кН	1
	165,8 кН	2
	663,3 кН	3
	49,3 кН	4

ЛЕКЦИЯ 38

Тема 2.8. Сопротивление усталости

Иметь представление об усталости материалов, о кривой усталости и пределе выносливости.

Знать характер усталостных разрушений, факторы, влияющие на сопротивление усталости, основы расчета на прочность при переменном напряжении.

Основные понятия

Многие детали машин работают в условиях переменных во времени напряжений. Так, вращающиеся валы и оси, нагруженные постоянными изгибающими силами, работают при переменных нормальных напряжениях изгиба.

Совокупность последовательных значений переменных напряжений за один период процесса их изменения называется циклом.

Обычно цикл представляют в виде графика, в котором по оси абсцисс откладывается время, а по оси ординат — напряжения (рис. 38.1).

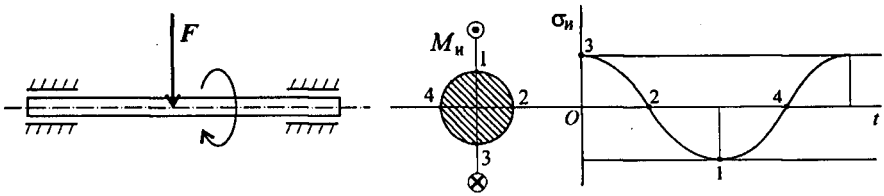


Рис. 38.1

Цикл характеризуется максимальным $\sigma_{\max}$, минимальным $\sigma_{\min}$ и средним напряжениями. Рассчитывается среднее значение напряжений σ_m, амплитуда цикла σ_a и коэффициент асимметрии цикла R

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}; \quad R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}.$$

Все приведенные определения и соотношения можно записать и для касательных напряжений.

Цикл, при котором максимальное и минимальное напряжения равны по величине и обратны по знаку, называют *симметричным циклом* (рис. 38.2).

$\sigma_m = 0; \quad \sigma_a = \sigma_m; \quad R = -1.$

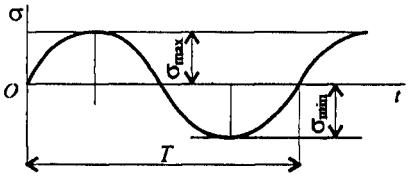


Рис. 38.2

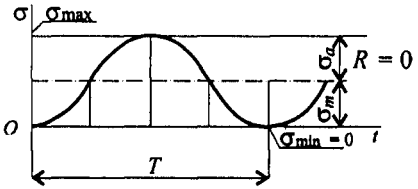


Рис. 38.3

Остальные циклы называют *асимметричными*. Часто встречается *отнулевой*, или *пульсирующий*, цикл, минимальное напряжение при этом цикле равно нулю, среднее напряжение равно амплитуде (рис. 38.3).

Переменные напряжения возникают в осях вагонов, рельсах, рессорах, валах машин, зубьях колес и многих других случаях.

Под действием переменных напряжений в материале *возникает микротрещина*, которая под действием повторяющихся напряжений растет в глубь изделия. Края трещины трутся друг о друга, и трещина быстро увеличивается. Поперечное сечение детали уменьшается, и в определенный момент случайный толчок или удар вызывает разрушение.

Появление трещин под действием переменных напряжений называют *усталостным разрушением*.

Усталостью называют процесс накопления повреждений в материале под действием повторно-переменных напряжений.

Характерный вид усталостных разрушений — трещины и часть поверхности блестящая в изломе. Такой характер излома вызван многократным нажатием, зашлифованностью частей детали.

Опыт показывает, что усталостное разрушение происходит при напряжениях ниже предела прочности, а часто и *ниже предела текучести*.

Способность материала противостоять усталостным разрушениям зависит от *времени* действия нагрузки и от *цикла напряжений*. При любой деформации нагружение с *симметричным циклом наиболее опасно*.

Опытным путем установлено, что существует *максимальное напряжение*, при котором материал *выдерживает, не разрушаясь* значительное число циклов.

Наибольшее (максимальное) напряжение цикла, при котором не происходит усталостного разрушения образца из данного материала после любого большого числа циклов, называют *пределом выносливости.*

Для определения *предела выносливости* изготавливают серию одинаковых образцов и проводят испытания при симметричном цикле изгиба. Образцы имеют цилиндрическую форму, гладкую поверхность (полированную) и плавные переходы.

Образцы устанавливают на испытательную машину и нагружают так, чтобы напряжение составляло примерно 80 % от предела прочности. После некоторого числа циклов образец разрушается. Фиксируют максимальное напряжение и число циклов до разрушения.

Испытания повторяют, постепенно снижая нагрузку на каждый последующий образец и фиксируя число циклов до разрушения образцов.

По результатам испытаний строят *график зависимости между максимальным напряжением и числом циклов нагружений до разрушения.* График называют *кривой усталости* (рис. 38.4). В большинстве случаев после числа циклов нагружений более 10^7 кривая приближается к прямой, параллельной оси абсцисс.

n — число циклов нагружения;

σ_R — предел выносливости:

σ_{-1} — предел выносливости при симметричном цикле ($R = -1$);

σ_0 — предел выносливости при отнулевом цикле ($R = 0$);

$n_{баз}$ — число циклов, при котором определяют предел выносливости (базовое число циклов).

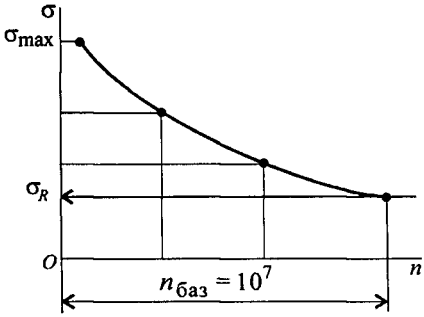


Рис. 38.4

Если провести испытания при асимметричном цикле, кривая ляжет выше, т. е. выносливость материала повысится.

Предел выносливости, определенный путем стандартных испы-

таний, является одной из *механических* характеристик материала.

Факторы, влияющие на сопротивление усталости

1. *Концентрация напряжений.* В местах, где имеются резкие изменения размеров, отверстия, резьба, острые углы, возникают большие местные напряжения (концентрация напряжений). В этих местах возникают усталостные трещины, трещины разрастаются, и это приводит к разрушению детали.

Местные напряжения значительно выше *номинальных напряжений, возникающих в гладких деталях.*

Влияние концентрации напряжений учитывается коэффициентом K_σ.

K_σ — эффективный коэффициент концентрации напряжений, зависит от формы поверхности.

2. *Размеры детали.* В деталях больших размеров возможны внутренняя неоднородность, инородные включения, незаметные микротрещины. Влияние размеров учитывается масштабным фактором K_d.

K_d — масштабный коэффициент, коэффициент влияния абсолютных размеров.

3. *Характер обработки поверхности.* Поверхность может быть шероховатой, покрытой следами от резца, т. е. ослабленной, а может быть усиленной специальными методами упрочнения: азотированием, поверхностной закалкой, цементацией. При отсутствии специального упрочнения поверхностный коэффициент меняется от 0,6 до 1.

При специальной обработке он может быть больше единицы: поверхность оказывается прочнее сердцевины.

K_F — коэффициент влияния шероховатости;

K_y — коэффициент влияния упрочнения, $K_y = 1{,}1 \div 2{,}8$.

Одновременный учет действия всех факторов, понижающих предел выносливости, можно провести с помощью коэффициента

$$(K_\sigma)_D = \left(\frac{K_\sigma}{K_d} + \frac{1}{K_F} - 1\right)\frac{1}{K_y}.$$

Предел выносливости в расчетном сечении будет равен

$$(\sigma_{-1})_D = \frac{\sigma_{-1}}{(K_\sigma)_D}.$$

Основы расчета на прочность при переменных напряжениях

Расчеты по нормальным и касательным напряжениям проводятся аналогично.

Расчетные коэффициенты выбираются по специальным таблицам.

При расчетах определяют запасы прочности по нормальным и касательным напряжениям.

Запас прочности по нормальным напряжениям: $s_\sigma = \dfrac{(\sigma_{-1})_D}{\sigma_a}$.

Запас прочности по касательным напряжениям: $s_\tau = \dfrac{(\tau_{-1})_D}{\tau_a}$,

где σ_a — амплитуда цикла нормальных напряжений; τ_a — амплитуда цикла касательных напряжений.

Полученные запасы прочности сравнивают с допускаемыми. Представленный расчет является *проверочным* и проводится при конструировании детали.

Контрольные вопросы и задания

1. Изобразите графики симметричного и отнулевого циклов изменения напряжений при повторно-переменных напряжениях.

2. Перечислите характеристики циклов, покажите на графиках среднее напряжение и амплитуду цикла. Что характеризует коэффициент асимметрии цикла?

3. Опишите характер усталостных разрушений.

4. Почему прочность при повторно-переменных напряжениях ниже, чем при постоянных (статических)?

5. Что называют пределом выносливости? Как строится кривая усталости?

6. Перечислите факторы, влияющие на сопротивление усталости.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО РАЗДЕЛУ «Сопротивление материалов»

Практическое занятие 6

Тема 2.2. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии

Знать порядок расчетов на прочность и жесткость и расчетные формулы.

Уметь проводить проектировочные и проверочные расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии.

Необходимые формулы

Нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где N — продольная сила; A — площадь поперечного сечения.

Удлинение (укорочение) бруса

$$\Delta l = \frac{Nl}{AE} \quad \text{или} \quad \Delta l = \frac{\sigma l}{E},$$

E — модуль упругости; l — начальная длина стержня.

Допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[s]},$$

$[s]$ — допускаемый запас прочности.

Условие прочности при растяжении и сжатии:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leqslant [\sigma].$$

Примеры расчетов на прочность и жесткость

Пример 1. Груз закреплен на стержнях и находится в равновесии (рис. П6.1). Материал стержней — сталь, допускаемое напряжение 160 МПа. Вес груза 100 кН. Длина стержней: первого — 2 м, второго — 1 м. Определить размеры поперечного сечения и удлинение стержней. Форма поперечного сечения — круг.

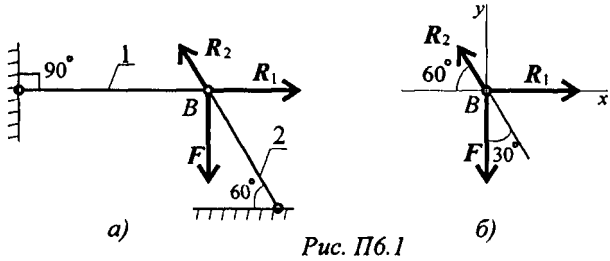


Рис. П6.1

Решение

1. Определить нагрузку на стержни. Рассмотрим равновесие точки B, определим реакции стержней. По пятой аксиоме статистики (закону действия и противодействия) реакция стержня численно равна нагрузке на стержень.

Наносим реакции связей, действующих в точке B. Освобождаем точку B от связей (рис. П6.1).

Выбираем систему координат так, чтобы одна из осей координат совпала с неизвестной силой (рис. П6.1б).

Составим систему уравнений равновесия для точки B:

$$\sum F_x = -R_2 \cos 60^\circ + R_1 = 0;$$
$$\sum F_y = R_2 \cos 30^\circ - F = 0.$$

Решаем систему уравнений и определяем реакции стержней.

$$R_2 = \frac{F}{\cos 30^\circ}; \quad R_2 = \frac{100}{0,866} = 115,5\,\text{кН}.$$

$$R_1 = R_2 \cos 60^\circ; \quad R_1 = 115,5 \cdot 0,5 = 57,4\,\text{кН}.$$

Направление реакций выбрано верно. Оба стержня сжаты. Нагрузки на стержни: $F_1 = 57,4$ кН; $F_2 = 115,5$ кН.

2. Определяем потребную площадь поперечного сечения стержней из условий прочности.

Условие прочности на сжатие: $\sigma = N/A \leqslant [\sigma]$, откуда

$$A \geqslant \frac{N}{[\sigma]}.$$

Стержень 1 ($N_1 = F_1$):

$$A_1 \geqslant \frac{57,4 \cdot 10^3}{160} = 358,75\,\text{мм}^2.$$

Для круга

$$A=\pi R^2;\quad R=\sqrt{\frac{A}{\pi}};\quad R_1\geqslant\sqrt{\frac{358{,}75}{3{,}14}}=10{,}68\,\text{мм};\quad d_1=21{,}3\,\text{мм}.$$

Стержень 2 ($N_2 = F_2$):

$$A_2 \geqslant \frac{115,5\cdot 10^3}{160} = 722\,\text{мм}^2;\quad R_2 \geqslant \sqrt{\frac{722}{3,14}} = 15,2\,\text{мм};$$

$$d_2 = 30,4\,\text{мм}.$$

Полученные диаметры округляем: $d_1 = 25$ мм, $d_2 = 32$ мм.

3. Определяем удлинение стержней $\Delta l = \dfrac{Nl}{AE}$.

Укорочение стержня 1:

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4};\quad A_2 = \frac{3{,}14\cdot 25^2}{4} = 490\,\text{мм}^2;$$

$$\Delta l_1 = \frac{57{,}4\cdot 10^3\cdot 2\cdot 10^3}{2\cdot 10^5\cdot 490} = 1{,}17\,\text{мм}.$$

Укорочение стержня 2:

$$A_2 = \frac{3{,}14\cdot 32^2}{4} = 804\,\text{мм}^2;\quad \Delta l_2 = \frac{115{,}5\cdot 10^3\cdot 1\cdot 10^3}{2\cdot 10^5\cdot 804} = 0{,}72\,\text{мм}.$$

Пример 2. Однородная жесткая плита с силой тяжести 10 кН, нагруженная силой $F = 4{,}5$ кН и моментом $m = 3$ кН·м, оперта в точке A и подвешена на стержне BC (рис. П6.2). Подобрать сечение стержня в виде швеллера и определить его удлинение, если длина стержня 1 м, материал — сталь, предел текучести 570 МПа, запас прочности для материала 1,5.

Решение

1. Определить усилие в стержне под действием внешних сил.

Система находится в равновесии, можно использовать уравнение равновесия для плиты: $\sum m_A = 0$.

R_B — реакция стержня, реакции шарнира A не рассматриваем.

$$\sum m_A = m + G\cdot 5 - R_B\cdot 7 + F\cdot 10 = 0.$$

$$R_B \cdot 7 = m + G \cdot 5 + F \cdot 10.$$

Откуда $$R_B = \frac{3 + 10 \cdot 5 + 4,5 \cdot 10}{7} = 14\,\text{кН}.$$

По третьему закону динамики реакция в стержне равна силе, действующей от стержня на плиту. Усилие в стержне равно 14 кН.

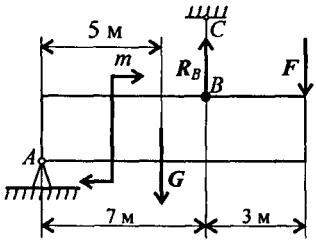


Рис. П6.2

2. По условию прочности определяем потребную величину площади поперечного сечения: $\sigma = N/A \leqslant [\sigma]$, откуда $A \geqslant N/[\sigma]$.

Допускаемое напряжение для материала стержня

$$[\sigma] = \frac{\sigma_\text{т}}{[s]} = \frac{570}{1,5} = 380\,\text{МПа}.$$

Следовательно, $$A \geqslant \frac{14 \cdot 10^3}{380} = 36,8\,\text{мм}^2 = 0,368\,\text{см}^2.$$

3. Подбираем сечение стержня по ГОСТ (Приложение 1).

Минимальная площадь швеллера 6,16 см^2 (№ 5; ГОСТ 8240–89).

Целесообразнее использовать равнополочный уголок № 2 ($d = 3$ мм), площадь поперечного сечения которого 1,13 см^2 (ГОСТ 8509–86).

4. Определить удлинение стержня:

$$\Delta l = \frac{Nl}{AE}. \quad E = 2 \cdot 10^5\,\text{МПа};$$

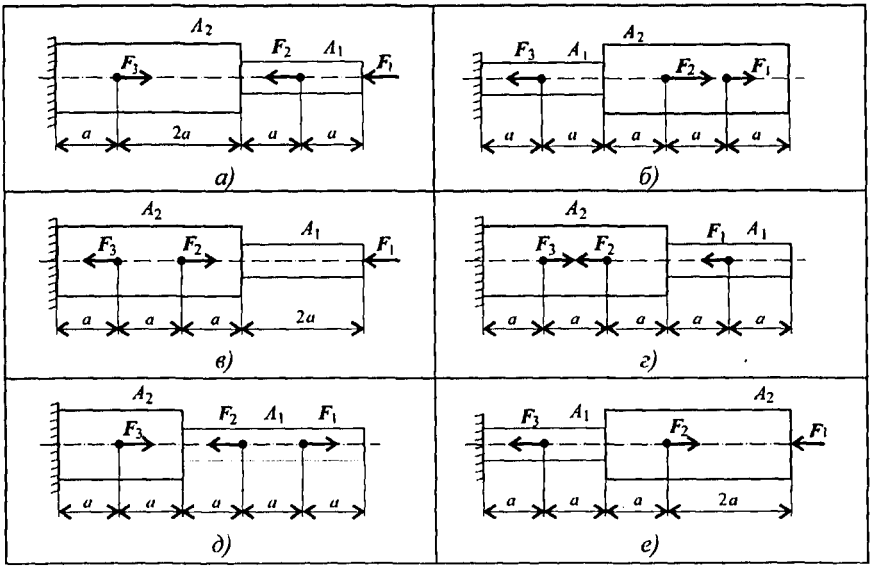
$$\Delta l = \frac{14 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 113} = 0,62\,\text{мм}.$$

На практическом занятии выполняется расчетно-графическая работа и проводится тестовый опрос.

Расчетно-графическая работа

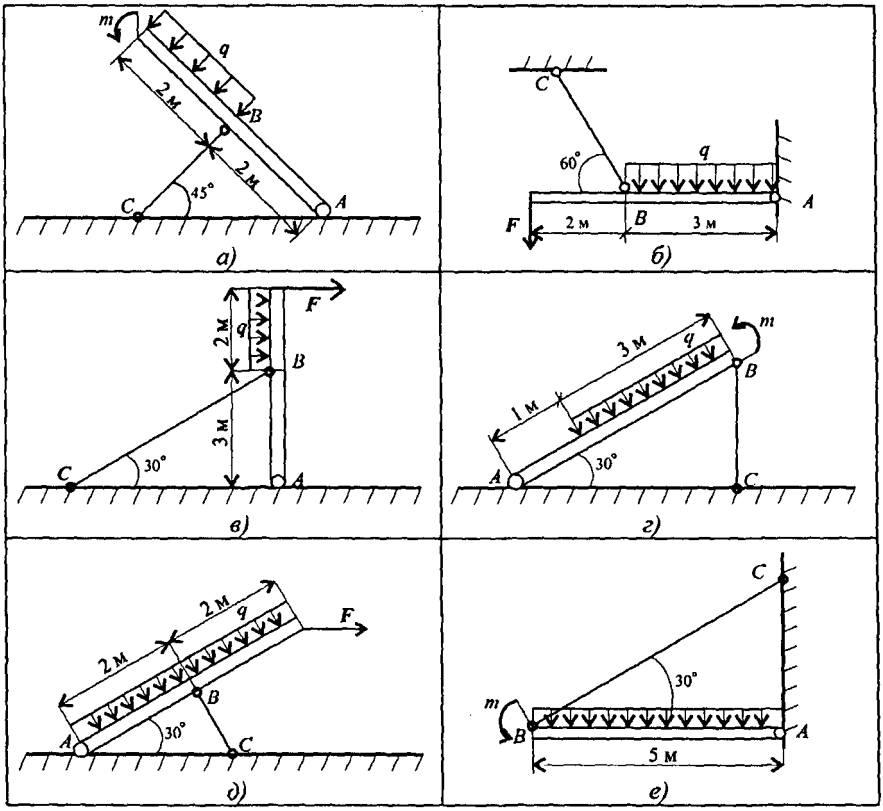
Задание 1. Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений по длине бруса. Определить перемещение свободного конца бруса. Двухступенчатый стальной брус нагружен силами $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$; $\boldsymbol{F}_3$. Площади поперечных сечений A_1 и A_2.

Принять $E = 2 \cdot 10^5$ Н/мм^2.



Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1, кН	20	26	20	17	16	10	26	40	14	28
F_2, кН	10	20	8	13	25	12	9	55	16	14
F_3, кН	5	10	4	8	28	13	3	24	10	5
A_1, см^2	1,8	1,6	1,0	2,0	1,2	0,9	1,9	2,8	2,1	1,9
A_2, см^2	3,2	2,4	1,5	2,5	2,8	1,7	2,6	3,4	2,9	2,4
a, м	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,4	0,3	0,2	0,5	0,6

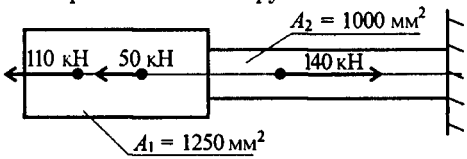
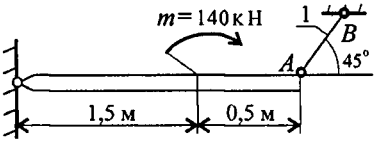
Задание 2. Балка AB, на которую действуют указанные нагрузки, удерживается в равновесии тягой BC. Определить размеры поперечного сечения тяги для двух случаев: 1) сечение — круг; 2) сечение — уголок равнополочный по ГОСТ 8509–86. Принять $[\sigma] = 160$ МПа. Собственный вес конструкции не учитывать.



Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F, кН	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
m, кН·м	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
q, кН/м	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22

При защите работы ответить на вопросы тестового задания.

Тема 2.2. Растяжение и сжатие. Расчеты на прочность и жесткость

Вопросы	Ответы	Код
1. Определить максимальную продольную силу в поперечном сечении бруса. 	110 кН	1
	140 кН	2
	160 кН	3
	300 кН	4
2. Определить максимальное напряжение в опасном сечении бруса (схема вопроса 1).	88 МПа	1
	128 МПа	2
	160 МПа	3
	188 МПа	4
3. Проверить прочность бруса, изображенного в вопросе 1, если материал бруса — сталь, $\sigma_в = 550$ МПа; $\sigma_т = 290$ МПа; допускаемый запас прочности $[s] = 2$.	$\sigma < [\sigma]$	1
	$\sigma = [\sigma]$	2
	$\sigma > [\sigma]$	3
	Данных недостаточно	4
4. Груз подвешен на стержне 1 и находится в равновесии. Материал стержня — сталь, допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа. Подобрать размеры сечения для стержня. Форма поперечного сечения — швеллер. 	№ 6,5	1
	№ 10	2
	№ 12	3
	№ 14	4
5. Определить удлинение стержня AB. Усилие в стержне 75,6 кН, длина стержня 2 м, материал — сталь, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, сечение — круг диаметром 30 мм.	1,07 мм	1
	2,12 мм	2
	0,1 мм	3
	0,615 мм	4

Практическое занятие 7
Тема 2.4. Геометрические характеристики плоских сечений

Знать формулы моментов инерции простейших сечений, способы вычисления моментов инерции при параллельном переносе осей.

Уметь определять полярные и главные центральные моменты инерции для сечений, имеющих ось симметрии.

Моменты инерции простейших сечений

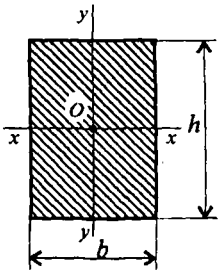


Рис. П7.1

Прямоугольник и квадрат (рис. П7.1)

Осевые:

$\mathcal{J}_x$ — относительно оси xx $\mathcal{J}_x = \dfrac{bh^3}{12}$;

$\mathcal{J}_y$ — относительно оси yy $\mathcal{J}_y = \dfrac{hb^3}{12}$.

Полярный $\mathcal{J}_p = \mathcal{J}_x + \mathcal{J}_y$.

Круг и кольцо (рис. П7.2)

Осевые: $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \dfrac{\pi d^4}{64}$ — круг;

$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \dfrac{\pi d^4}{64}(1 - c^4)$ — кольцо.

Полярный: $\mathcal{J}_p = \dfrac{\pi d^4}{32}$ — круг;

$\mathcal{J}_p = \dfrac{\pi d^4}{32}(1 - c^4)$ — кольцо,

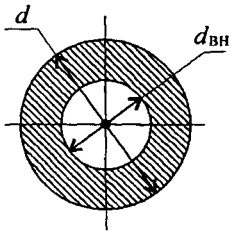


Рис. П7.2

где d — диаметр круга и наружный диаметр кольца; $d_{вн}$ — внутренний диаметр кольца; $c = d_{вн}/d$.

Моменты инерции относительно параллельных осей (рис. П7.3)

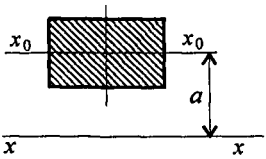


Рис. П7.3

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_{x_0} + a^2 A,$$

где $\mathcal{J}_x$ — момент инерции относительно оси xx;
$\mathcal{J}_{x_0}$ — момент инерции относительно оси x_0x_0; A — площадь сечения; a — расстояние между осями.

Рекомендации для решения задач расчетно-графической работы

1. *Момент инерции сложной фигуры является суммой моментов инерции частей, на которые ее разбивают.* Разбить заданную фигуру на простейшие части, для каждой определить главные центральные моменты инерции по известным формулам.

2. Моменты инерции вырезов и отверстий можно представить отрицательными величинами.

3. Заданные сечения симметричны, главные центральные оси совпадают с осями симметрии составного сечения.

4. Моменты инерции частей, чьи главные центральные оси не совпадают с главными центральными осями сечения в целом, пересчитывают с помощью формулы для моментов инерции относительно параллельных осей. Расстояние между параллельными осями определить по чертежу.

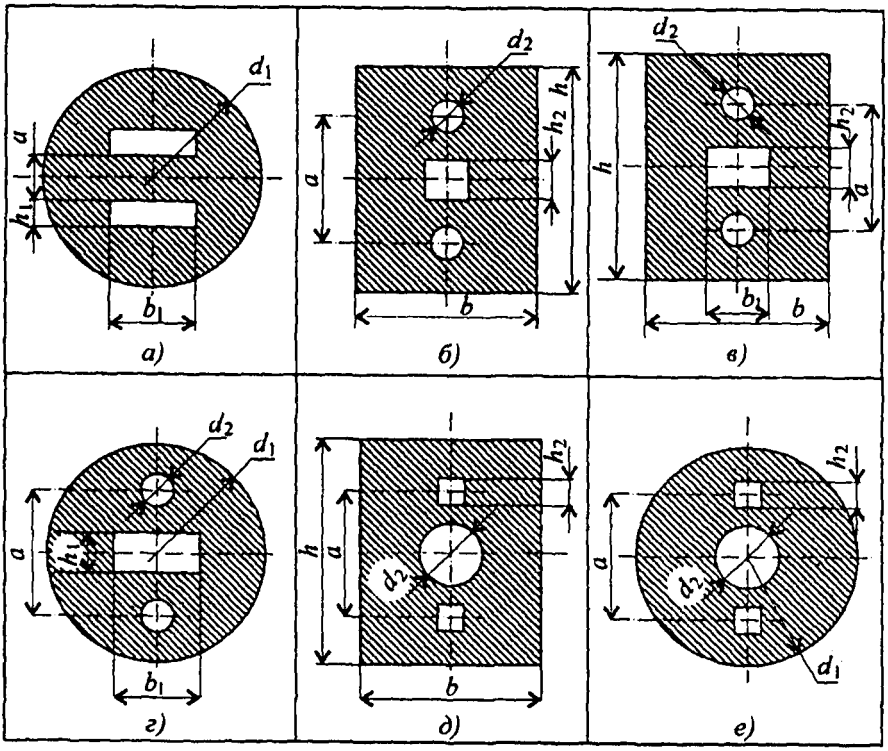
5. При выполнении задания 2 главные центральные моменты инерции отдельных стандартных профилей определить по таблицам ГОСТ (Приложение 1).

Для использованных в составных сечениях полос моменты инерции определить по известной формуле для прямоугольника.

Расчетно-графическая работа

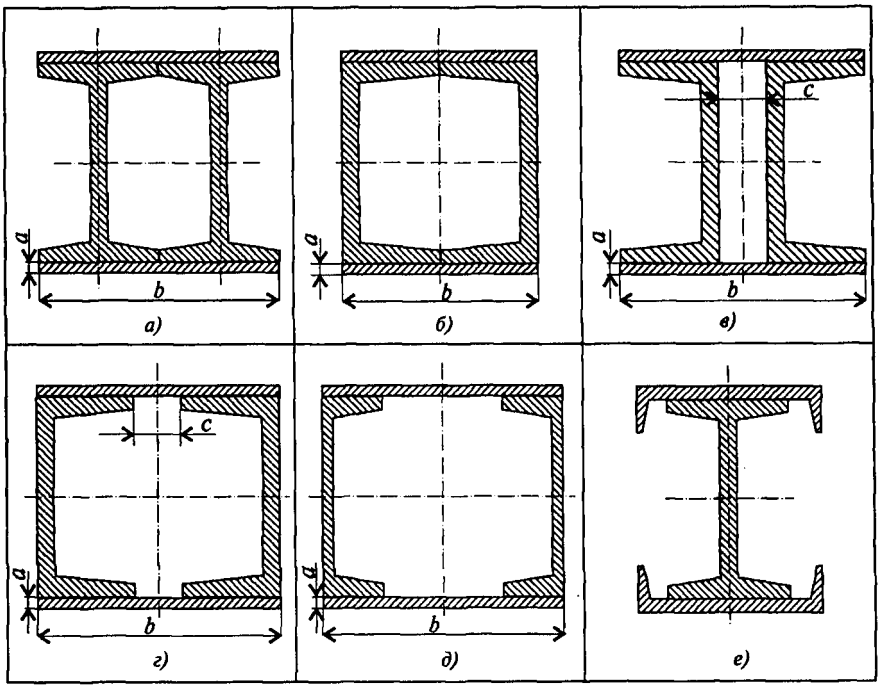
Геометрические характеристики плоских сечений

Задание 1. Вычислить главные центральные моменты инерции сечений, представленных на схемах. При расчетах воспользоваться данными таблицы, выбрав необходимые величины.



Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_1, мм	72	80	88	96	98	72	76	88	96	104
d_2, мм	12	14	16	18	10	12	14	16	18	20
h, мм	72	80	88	96	98	72	76	88	96	104
b, мм	36	42	48	54	60	36	42	48	4	60
a, мм	48	52	56	60	58	48	48	56	60	64
h_1, мм	16	18	20	22	24	16	18	20	22	24
b_1, мм	32	36	40	44	48	32	36	40	44	48
h_2, мм	6	8	10	6	8	10	6	8	10	6

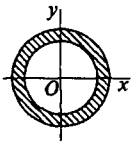
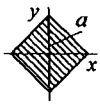
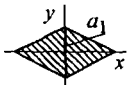
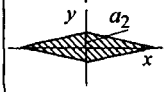
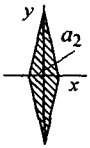
Задание 2. Вычислить главные центральные моменты инерции составных сечений. При расчете воспользоваться данными таблицы, выбрав необходимые величины. Геометрические характеристики стали горячекатаной выбрать по ГОСТ 8239–89 (Балки двутавровые) и ГОСТ 8240–89 (Швеллеры).



Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ швеллера	10	12	14	16	18	20	22	24	27	30
№ двутавра	10	12	14	16	18	20	22	24	27	30
a, мм	8	10	12	14	16	8	10	12	14	16
c, мм	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30

При защите работы ответить на вопросы тестового задания.

Тема 2.4. Геометрические характеристики плоских сечений

Вопросы	Ответы	Код
1. Диаметр сплошного вала увеличили в 3 раза. Во сколько раз увеличились главные центральные моменты инерции?	В 6 раз	1
	В 3 раза	2
	В 9 раз	3
	В 81 раз	4
2. Определить осевой момент инерции относительно оси Oy, если $J_x = 4\,\text{см}^4$. 	$J_y = 4\,\text{см}^4$	1
	$J_y = 0\,\text{см}^4$	2
	$J_y = 8\,\text{см}^4$	3
	$J_y = 16\,\text{см}^4$	4
3. У четырех ромбов одна и та же площадь. В каком случае значение J_x наименьшее?		1
		2
		3
		4

Продолжение		
Вопросы	**Ответы**	**Код**
4. Выбрать формулу для определения осевого момента инерции всего сечения относительно его главной центральной оси y.	$\frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}$	1
	$\frac{\pi d^4}{64} - \frac{b^3 h}{12}$	2
	$\frac{\pi d^4}{64} - \frac{bh^3}{12}$	3
	$\frac{b^3 h}{12} - \frac{\pi d^4}{64}$	4
5. Найти главный центральный момент инерции всего сечения относительно оси Oy.	1137 см^4	1
	1924 см^4	2
	815 см^4	3
	1602 см^4	4

Практическое занятие 8
Тема 2.5. Кручение. Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Знать формулы для расчета напряжений в точке поперечного сечения бруса, условия прочности и жесткости при кручении.

Уметь выполнять проектировочные и проверочные расчеты круглого бруса для статически определимых систем, проводить проверку на жесткость.

Основные положения расчетов при кручении

Распределение касательных напряжений по сечению при кручении (рис. П8.1)

Касательное напряжение в точке A:

$$\tau_A = \frac{M_к \rho_A}{J_p},$$

где ρ_A — расстояние от точки A до центра сечения.

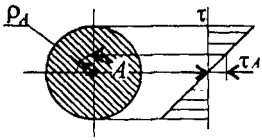


Рис. П8.1

Условие прочности при кручении

$$\tau_к = \frac{M_к}{W_p} \leqslant [\tau_к]; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3 \ \text{(круг)},$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}(1 - c^4) \ \text{(кольцо)},$$

$M_к$ — крутящий момент в сечении, Н·м, Н·мм;

W_p — момент сопротивления при кручении, м^3, мм^3;

$[\tau_к]$ — допускаемое напряжение при кручении, Н/м^2, Н/мм^2.

Проектировочный расчет, определение размеров поперечного сечения

Сечение — круг: $d \geqslant \sqrt[3]{\dfrac{M_к}{0,2[\tau_к]}}$.

Сечение — кольцо: $d \geqslant \sqrt[3]{\dfrac{M_к}{0,2(1-c^4)[\tau_k]}}$,

где d — наружный диаметр круглого сечения;

$d_{вн}$ — внутренний диаметр кольцевого сечения; $c = d_{вн}/d$.

Определение рационального расположения колес на валу

Рациональное расположение колес — расположение, при котором максимальное значение крутящего момента на валу — наименьшее из возможных.

Для экономии металла сечение бруса рекомендуется выполнить кольцевым.

Условие жесткости при кручении

$$\varphi_0 = \frac{M_к}{G\mathcal{J}_p} \leqslant [\varphi_0]; \quad G \approx 0,4E,$$

G — модуль упругости при сдвиге, Н/м^2, Н/мм^2;

E — модуль упругости при растяжении, Н/м^2, Н/мм^2.

$[\varphi_0]$ — допускаемый угол закручивания, $[\varphi_0] \cong 0,5 \div 1$ град/м;

$\mathcal{J}_p$ — полярный момент инерции в сечении, м^4, мм^4.

Проектировочный расчет, определение наружного диаметра сечения

$$\mathcal{J}_p \geqslant \frac{M_к}{G[\varphi_0]}; \qquad \mathcal{J}_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4 \quad \text{(круг)}; \quad d \geqslant \sqrt[4]{\frac{32\mathcal{J}_p}{\pi}}.$$

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi d^4}{32}(1 - c^4) \text{ (кольцо)}; \qquad d \geqslant \sqrt[4]{\frac{32\mathcal{J}_p}{\pi(1 - c^4)}}.$$

Рекомендации по выполнению расчетно-графической работы

1. Построить эпюру крутящих моментов по длине вала для предложенной в задании схемы.

2. Выбрать рациональное расположение колес на валу и дальнейшие расчеты проводить для вала с рационально расположенными шкивами.

3. Определить потребные диаметры вала круглого сечения из расчета на прочность и жесткость и выбрать наибольшее из полученных значений, округлив величину диаметра.

4. Сравнить затраты металла для случая круглого и кольцевого сечений. Сравнение провести по площадям поперечных сечений валов.

Площади валов рассчитать в наиболее нагруженном сечении (по максимальному крутящему моменту на эпюре моментов). (Пример решения в лекции 28.)

Расчетно-графическая работа

Для стального вала круглого поперечного сечения определить значения внешних моментов, соответствующих передаваемым мощностям, и уравновешенный момент.

Построить эпюру крутящих моментов по длине вала.

Рациональным расположением шкивов на валу добиться уменьшения значения максимального крутящего момента на валу.

Построить эпюру крутящих моментов для этого случая.

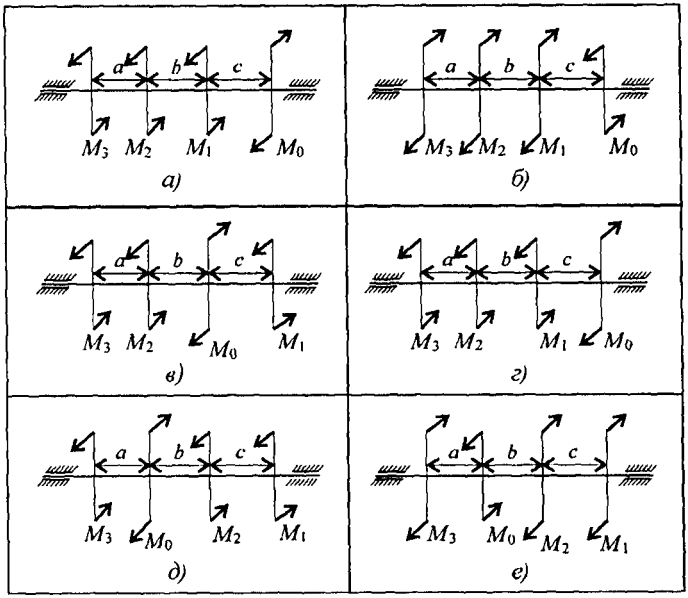
Дальнейшие расчеты вести для вала с рациональным расположением шкивов.

Определить диаметры вала по сечениям из расчетов на прочность и жесткость. Полученный больший результат округлить до ближайшего четного или оканчивающегося на 5 числа.

При расчете использовать следующие данные: вал вращается с угловой скоростью 25 рад/с; материал вала — сталь, допускаемое напряжение кручения 30 МПа, модуль упругости при сдвиге $8 \cdot 10^4$ МПа; допускаемый угол закручивания $[\varphi_0] = 0,02$ рад/м.

Провести расчет для вала кольцевого сечения, приняв $c = 0,9$. Сделать выводы о целесообразности выполнения вала круглого или кольцевого сечения, сравнив площади поперечных сечений.

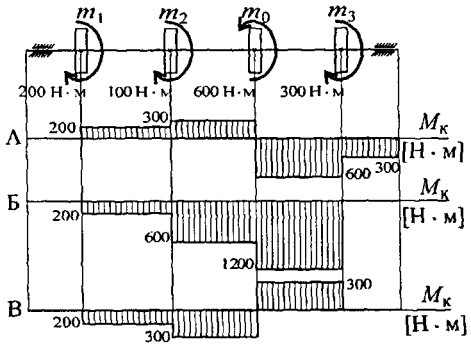
Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a = b = c$, м	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
P_1, кВт	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
P_2, кВт	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
P_3, кВт	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0



При защите работы ответить на вопросы тестового задания.

Тема 2.5. Кручение

Вопросы	Ответы	Код
1. Выбрать эпюру, соответствующую заданию.	А	1
	Б	2
	В	3
	Верный ответ не приведен	4



Продолжение		
Вопросы	**Ответы**	**Код**
2. В каком порядке рациональнее расположить шкивы, чтобы получить минимальную нагрузку на вал? (См. схему к вопросу 1.)	m_2; m_1; m_3; m_0	1
	m_1; m_2; m_3; m_0	2
	m_2; m_1; m_0; m_3	3
	m_3; m_1; m_0; m_2	4
3. Указать размерность величины в знаменателе $\tau_{max} = \frac{M_к}{W_p}$.	МПа	1
	мм^2	2
	мм^3	3
	Н·м	4
4. Определить диаметр бруса из условия прочности, если максимальный крутящий момент 1300 Н·м, допускаемое напряжение материала $[\tau] = 50$ МПа.	48 мм	1
	51 мм	2
	5,1 мм	3
	72 мм	4
5. Как изменится угол закручивания вала, если крутящий момент увеличится в 2 раза, а диаметр увеличится в 4 раза?	Увеличится в 4 раза	1
	Увеличится в 256 раз	2
	Уменьшится в 256 раз	3
	Уменьшится в 128 раз	4

Практическое занятие 9
Тема 2.6. Расчеты на прочность при изгибе

Знать распределение нормальных напряжений при чистом изгибе, расчетные формулы.

Уметь строить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, выполнять проектировочные и проверочные расчеты на прочность, выбирать рациональные формы поперечных сечений.

Основные положения и расчетные формулы при изгибе

Распределение нормальных и касательных напряжений при изгибе

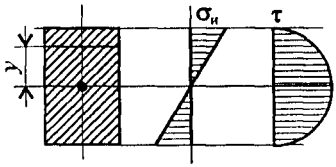


Рис. П9.1

$$\sigma_и = \frac{M_и y}{J_x};$$

$$\tau_{max} = \frac{1{,}5Q}{A},$$

где $M_и$ — изгибающий момент в сечении; Q — поперечная сила в сечении; y — расстояние до нейтрального слоя; J_x — осевой момент инерции сечения (рис. П9.1);

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}},$$

W_x — осевой момент сопротивления сечения; A — площадь сечения.

Условие прочности при изгибе

$$\sigma_и^{max} = \frac{M_и}{W_x} \leqslant [\sigma_и],$$

где $[\sigma_и]$ — допускаемое напряжение.

Знаки изгибающих моментов и поперечных сил (рис. П9.2)

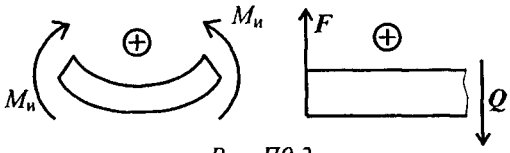


Рис. П9.2

Упражнения при подготовке к самостоятельной работе

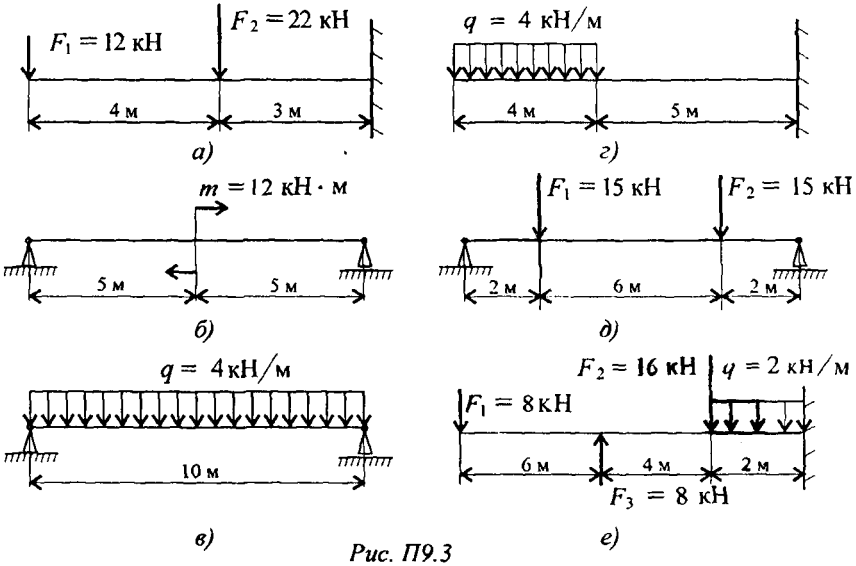


Рис. П9.3

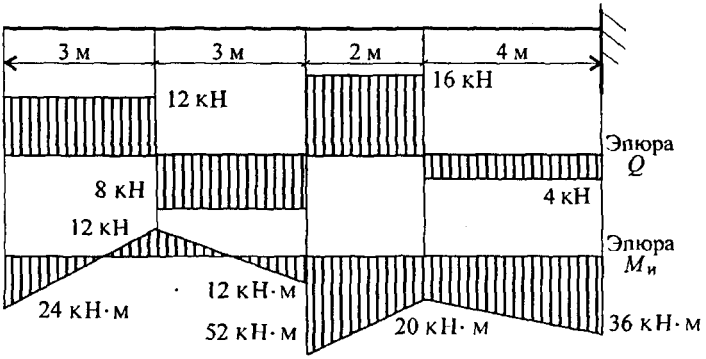


Рис. П9.4

1. Используя правила построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов и дифференциальные зависимости между интенсивностью нагрузки, поперечной силой и изгибающим моментом,

построить эпюры изгибающих моментов для изображенных балок (рис. П9.3). Рекомендации в лекциях 30 и 31.

Для каждого случая определить максимальные значения моментов.

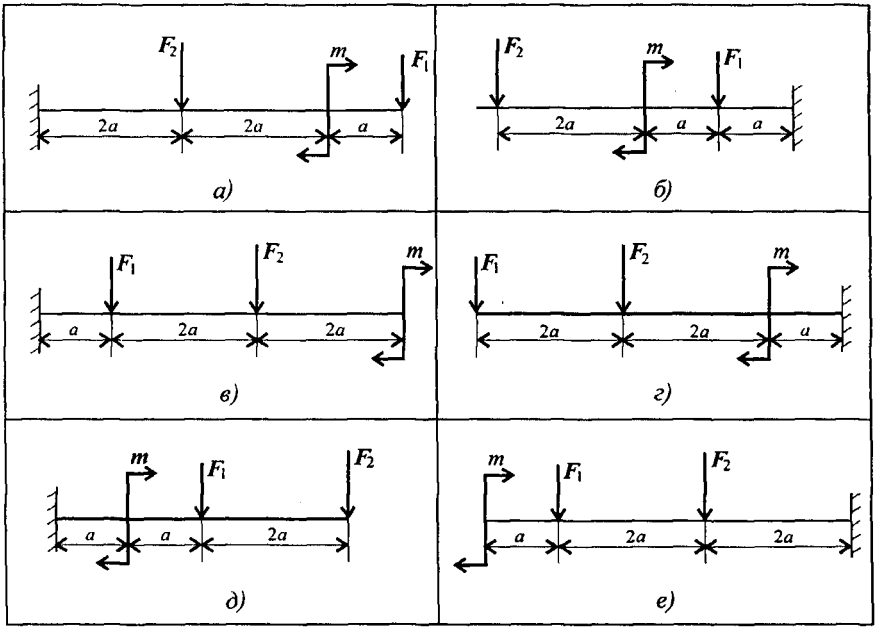
2. По приведенным эпюрам поперечной силы и изгибающего момента восстановить нагрузки на балке (рис. П9.4).

3. Повторить основные положения при расчете на изгиб.

Расчетно-графическая работа

Задание 1. Для одноопорной балки, нагруженной сосредоточенными силами и парой сил с моментом m, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Найти максимальный изгибающий момент и из условия прочности подобрать поперечное сечение для балки в виде двутавра и прямоугольника с соотношением сторон $h = 2b$. Материал — сталь, допускаемое напряжение 160 МПа. Рассчитать площади поперечных сечений и сделать вывод о целесообразности применения сечения.

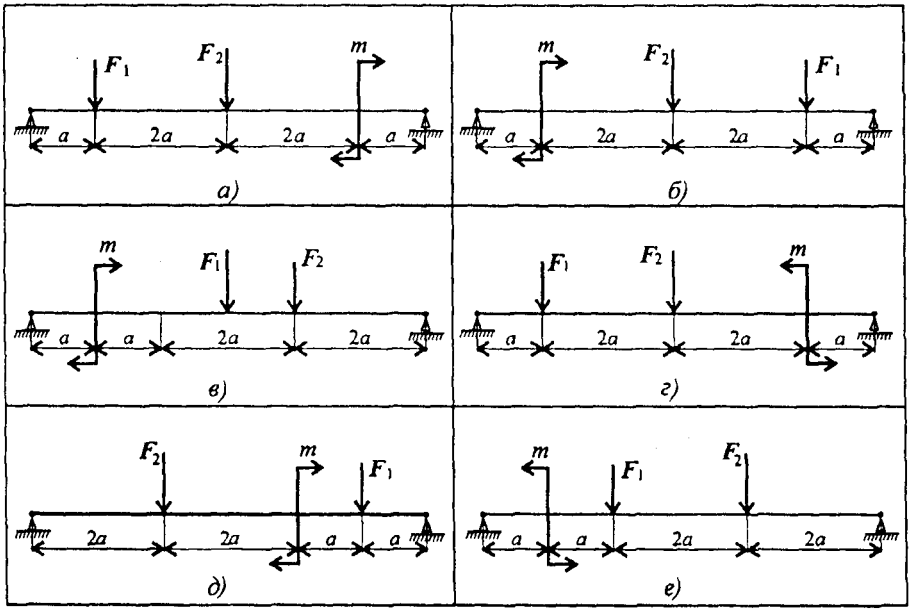
Пример расчета в лекции 30.



Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1, кН	10	12	14	16	18	10	22	24	26	28
F_2, кН	4,4	4,8	7,8	8,4	12	12,8	17	18	22,8	24
m, кН·м	8	7	6	5	4	8	7	6	5	4
a, м	0,2	0,2	0,3	03	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,6

Задание 2. Для двухопорной балки, нагруженной сосредоточенными силами и парой сил с моментом, определить реакции в опорах. Найти максимальный изгибающий момент и, используя условие прочности, подобрать необходимые размеры поперечных сечений. Материал — сталь, допускаемое напряжение изгиба 160 МПа. Сечение — швеллер.

Пример расчета в лекции 30.



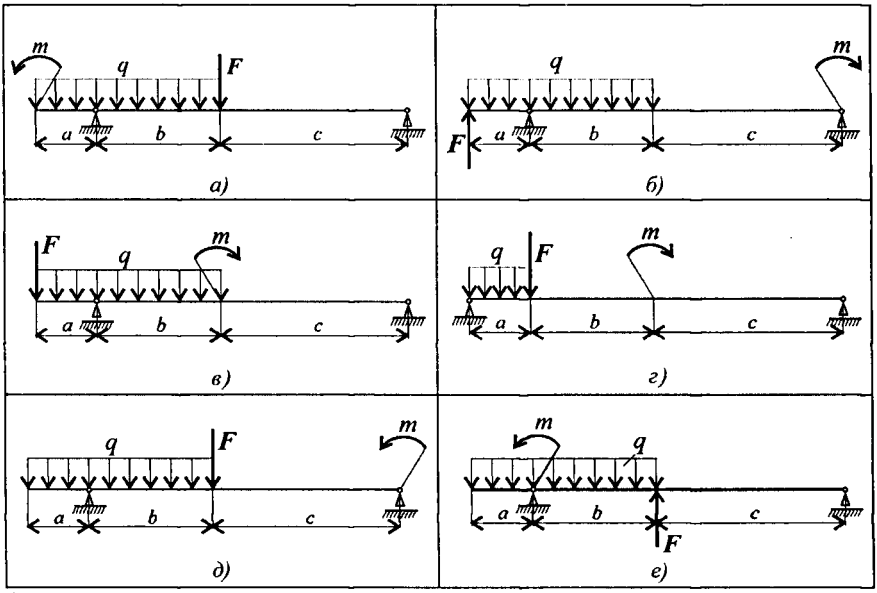
Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1, кН	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
F_2, кН	4,4	4,8	7,8	8,4	12	12,8	17	18	22,8	24
m, кН·м	3	4	5	6	7	7	6	5	4	3
a, м	0,2	0,2	0,3	03	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,6

Задание 3. Для изображенных балок построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Сечение балок — сдвоенный двутавр. Материал — сталь, допускаемое напряжение изгиба 160 МПа. Проверить прочность балок. В случае, если прочность не обеспечена, подобрать сечение большего размера.

В вариантах 1–5 использован двутавр № 20.

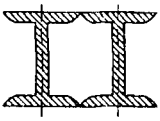
В вариантах 6–10 — двутавр № 30.

Пример расчета в лекции 31.



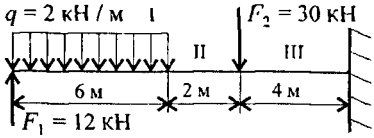
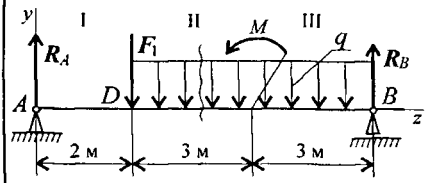
Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m, кН·м	15	17	19	20	21	23	24	25	26	28
F, кН	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105
q, кН/м	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a, м	0,5	0,6	0,8	0,9	1	1	1,1	0,9	0,6	0,8
b, м	1,5	1,6	1,8	1,9	2	1	2,3	2,1	2,5	2,3
c, м	1,5	1,7	1,9	2	2,1	1,8	2,7	2,5	2,6	2,4

Форма поперечного сечения

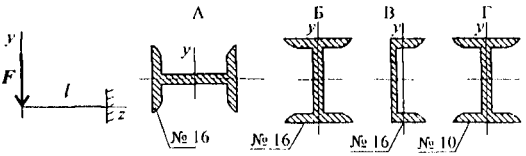
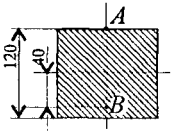


При защите работы ответить на вопросы тестового задания.

Тема 2.6. Изгиб. Расчеты на прочность

Вопросы	Ответы	Код
1. Определить участок бруса, на котором возникает чистый изгиб. 	I	1
	II	2
	III	3
	Чистый изгиб не возникает	4
2. Выбрать выражение для изгибающего момента в любом сечении на участке II. 	$R_A z - F_1(z-2) + \frac{q(z-2)^2}{2}$	1
	$R_A z - F_1(z-2) - \frac{q(z-2)^2}{2}$	2
	$R_B z - \frac{qz^2}{2} - M$	3
	$R_B z - \frac{qz^2}{2} + M$	4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
3. Известно, что в сечении бруса поперечная сила $Q = 20$ кН, а изгибающий момент $M_x = 120$ кН·м. Определить максимальное напряжение изгиба в этом сечении. Сечение бруса — двутавр № 45.	23,8 МПа	1
	46,2 МПа	2
	97,5 МПа	3
	142,2 МПа	4
4. В каком из вариатов сечений балка выдержит бóльшую нагрузку? 	А	1
	Б	2
	В	3
	Г	4
5. При чистом изгибе в точке A поперечного сечения возникло нормальное напряжение 48 МПа. Чему равно нормальное напряжение в точке B? 	48 МПа	1
	40 МПа	2
	24 МПа	3
	32 МПа	4

Практическое занятие 10
Тема 2.7. Расчет бруса круглого поперечного сечения при сочетании основных деформаций

Уметь рассчитать брус круглого поперечного сечения на прочность при сочетании основных деформаций.

Основные положения и расчетные формулы

Геометрические характеристики круга и кольца

Круг (рис. П10.1)

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4.$$

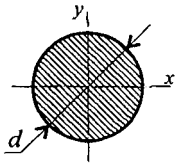


Рис. П10.1

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Кольцо (рис. П10.2)

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi d^4}{32}(1 - c^4); \quad c = \frac{d_{\text{вн}}}{d}.$$

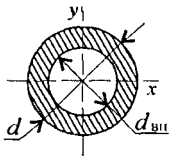


Рис. П10.2

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \frac{\pi d^4}{64}(1 - c^4).$$

Моменты сопротивления:

круг: $W_x = W_y = \dfrac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3;$

кольцо: $W_x = W_y = \dfrac{\pi d^3}{32}(1 - c^4) \approx 0{,}1d^3(1 - c^4);$

Площади сечений:

круг: $A = \dfrac{\pi d^2}{4};$ кольцо: $A = \dfrac{\pi}{4}(d^2 - d_{\text{вн}}^2).$

Условие прочности при совместном действии изгиба и кручения:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_x} \leqslant [\sigma].$$

Эквивалентные моменты:

при расчете по гипотезе максимальных касательных напряжений:

$$M_{\text{экв III}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2};$$

— при расчете по энергетической гипотезе формоизменения:

$$M_{\text{экв V}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75 M_{\text{к}}^2}.$$

Упражнение. В опасном сечении вала действуют изгибающие моменты $M_x = 40$ кН·м и $M_y = 50$ кН·м и крутящий момент $M_{\text{к}} = 100$ кН·м. Материал вала — сталь, допускаемое напряжение $[\sigma] = 100$ МПа. Определить потребные размеры вала круглого и кольцевого сечения при $c = 0{,}6$. Расчет провести по теории максимальных касательных напряжений.

Порядок расчета:

1. Определить суммарный изгибающий момент в сечении.

2. Определить эквивалентный момент в сечении.

3. Из условия прочности определить потребный момент сопротивления с сечения.

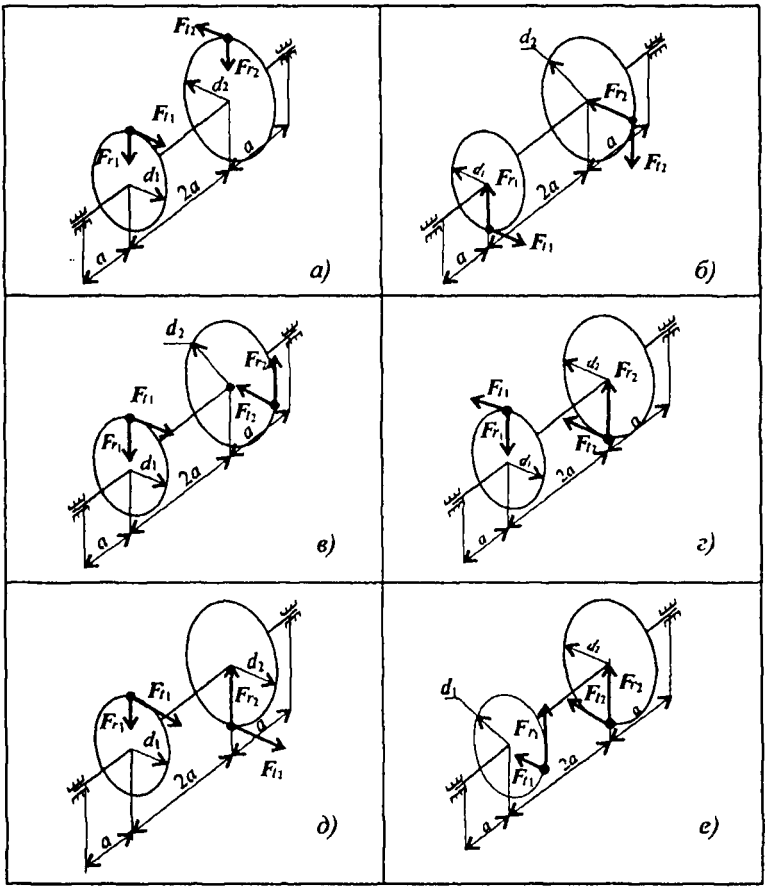
4. Определить потребный диаметр вала круглого сечения.

5. Определить потребные внешний и внутренний диаметры кольцевого сечения.

6. Сравнить полученные результаты по полученным площадям поперечных сечений.

Расчетно-графическая работа

Для промежуточного вала редуктора, передающего мощность P при угловой скорости ω, определить вертикальную и горизонтальную составляющие реакций подшипников, построить эпюры крутящего момента и изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Определить диаметры вала по сечениям, приняв $[\sigma] = 60$ МПа и полагая $F_r = 0,364 F_t$. Расчет произвести по гипотезе максимальных касательных напряжений.



Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P, кВт	40	38	36	34	32	30	28	26	24	22
w, рад/с	70	65	62	58	54	50	46	42	38	34
a, мм	60	70	80	90	100	60	70	80	90	100
d_1, мм	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
d_2, мм	250	240	230	220	210	200	190	180	170	160

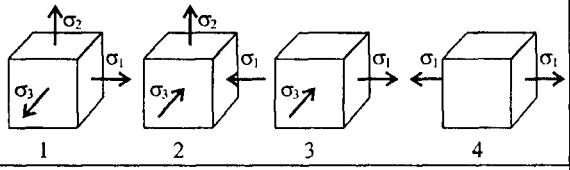
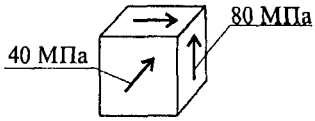
У к а з а н и е. Окружную силу определить по формуле

$$F_t = \frac{2M}{d}, \quad \text{где} \quad M = \frac{P}{\omega}.$$

Пример решения в лекции 35 (Пример 2).

При защите работы ответить на вопросы тестового задания.

Тема 2.7. Сочетание основных деформаций. Гипотезы прочности

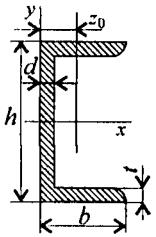
Вопросы	Ответы	Код
1. Среди приведенных схем выбрать плоское напряженное состояние. 	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
2. Для заданного напряженного состояния вычислить эквивалентное напряжение, используя гипотезу наибольших касательных напряжений. 	120	1
	104	2
	165	3
	200	4
3. Выбрать формулу для расчета эквивалентного момента по гипотезе энергии формоизменения.	$\sqrt{M_x^2 + M_y^2}$	1
	$\sqrt{M_и^2 + M_к^2}$	2
	$\sqrt{M_и^2 + 0,75M_к^2}$	3
	$M_и + M_к$	4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
4. На приведенной схеме вала выбрать участок, где действует крутящий момент.	1 участок	1
	2 участок	2
	3 участок	3
	Такого участка на схеме нет	4
5. По схеме нагружения вала определить необходимый диаметр в опасном сечении. Допускаемое напряжение при изгибе 120 Н/мм^2. Расчет провести по гипотезе максимальных касательных напряжений.	20,5 мм	1
	25 мм	2
	28,5 мм	3
	32,5 мм	4

ПРИЛОЖЕНИЕ № 1

Сталь горячекатаная. ШВЕЛЛЕРЫ (по ГОСТ 8240–89)



Обозначения:

h — высота швеллера; b — ширина швеллера; d — толщина стенки; t — средняя толщина полки; A — площадь швеллера; J — момент инерции; W — момент сопротивления; i — радиус инерции; S — статический момент полусечения; z_0 — расстояние от оси y до наружной грани стенки

Таблица 1

№ профиля	Размеры, мм				A, см^2	J_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	J_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см	z_0, см
	h	b	d	t									
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,68
16	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
18	180	70	6,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
20	200	80	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Сталь горячекатаная.

БАЛКИ ДВУТАВРОВЫЕ (по ГОСТ 8239–89)

Обозначения:

h — высота балки; b — ширина балки; d — толщина стенки; t — средняя толщина полки; A — площадь сечения; $\mathcal{J}$ — момент инерции; W — момент сопротивления; i — радиус инерции; S — статический момент полусечения

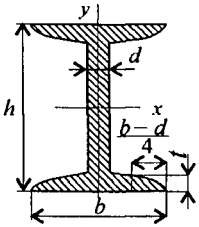
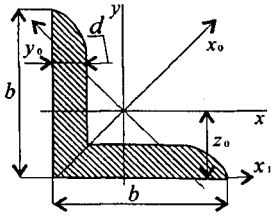


Таблица 2

№ профиля	Размеры, мм				A, см^2	$\mathcal{J}_x$, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	$\mathcal{J}_y$, см^4	W_y, см^3	i_y, см
	h	b	d	t								
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Сталь прокатная угловая равнополочная

(по ГОСТ 8509–86)



Обозначения:

b — ширина полки; d — толщина полки; $\mathcal{J}$ — момент инерции; i — радиус инерции; W — момент сопротивления; z_0 — расстояние от центра тяжести до наружной грани полки; A — площадь уголка

Табл

Номер уголка	Размеры, мм		A, см^2	Справочные величины для осей							
				$x-x$			x_0-x_0		y_0-y_0		
	b	d		J_x, см^4	W_x, см^4	i_x см	$J_{x0\,max}$, см^4	$i_{x0\,max}$, см^4	$J_{y0\,min}$, см^4	$W_{y0\,min}$, см^3	$i_{y0\,min}$, см
2	20	3	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39
		4	1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38
2,5	25	3	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49
		4	1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48
2,8	28	3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55
3,0	30	3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59
		4	2,27	1,84	0,37	0,80	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58
3,2	32	3	1,86	1,77	0,77	0,97	280	1,23	0,74	0,59	0,63
		4	2,43	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62
3,5	35	3	2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69
		4	2,17	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68
3,5	35	5	3,28	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68
4,0	40	3	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79
		4	3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78
		5	3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78
4,5	45	3	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89
		4	3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89
		5	4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88
5,0	50	3	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00
		4	3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99
		5	4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98
		6	5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98
5,6	56	4	4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11

Продолжение табл

Номер уголка	Размеры, мм		A, см^2	Справочные величины для осей							
				$x-x$			x_0-x_0		y_0-y_0		
	b	d		J_x, см^4	W_x, см^4	i_x см	$J_{x0\,max}$, см^4	$i_{x0\,max}$, см^4	$J_{y0\,min}$, см^4	$W_{y0\,min}$, см^3	$i_{y0\,min}$, см
		5	5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10
6,0	60	4	4,72	16,21	3,70	1,85	25,69	2,33	6,72	2,93	1,19
		5	5,83	19,79	4,56	1,84	31,40	2,32	8,18	3,49	1,18
		6	6,92	23,21	5,40	1,83	36,81	2,31	9,60	3,99	1,18
		8	9,40	29,55	7,00	1,81	46,77	2,27	12,34	4,90	1,17
		10	11,08	35,32	8,52	1,79	55,64	2,24	15,00	5,70	1,16
6,3	63	4	4,69	18,86	4,09	1,95	29,00	2,45	7,81	3,26	1,25
		5	6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25
		6	7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24
7,0	70	4,5	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39
		5	6,86	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39

Окончание табл. 3

Номер уголка	Размеры		A, см^2	Справочные величины для осей								
				$x-x$			x_0-x_0		y_0-y_0			z_0, см^2
	b	d		J_x, см^4	W_x, см^4	i_x см	$J_{x0\,max}$, см^4	$i_{x0\,max}$, см^4	$J_{y0\,min}$, см^4	$W_{y0\,min}$, см^3	$i_{y0\,min}$, см	
		8	12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	2,27
9,0	90	6	10,61	82,10	12,49	2,78	130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	2,43
10	100	10	19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	2,83
		16	29,68	263,82	38,04	2,98	416,04	3,74	111,61	25,79	1,94	3,06
11	110	8	17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	3,00
12,5	125	12	28,89	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	3,53
		14	33,37	481,76	54,17	3,80	763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	3,61
		16	37,77	538,56	61,09	3,78	852,84	4,75	224,29	43,10	2,44	3 68
14	140	10	27,33	512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	3,82
		12	32,49	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	3,90
15	150	15	43,08	908,38	84,66	4,59	1442,60	5,79	374,17	61,96	2,95	4,27
16	160	10	31,43	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,38	52,52	3,19	4,30
		16	49,07	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	4,55
18	180	12	42,19	1316,62	100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	4,89
20	200	12	47,10	1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	5,37
		14	54,60	2097,00	144,17	6,20	3333,00	7,81	861,00	111,50	3,97	5,46
		20	76,54	2871,47	200,73	6,12	4560,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	5,70
		30	111,54	4019,60	288,57	6,00	6351,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	6,07
22	220	14	60,38	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	5,91
25	250	20	96,96	5764,87	318,76	7,71	9159,73	9,72	2370,01	242,52	4,94	6,91
		25	119,71	7006,39	391,72	7,65	11125,5	9,64	2887,26	287,14	4,91	7,11
		30	141,96	8176,52	462,11	7,59	12964,7	9,56	3388,98	327,82	4,89	7,31

ПРИЛОЖЕНИЕ № 2

Ориентировочные значения пределов прочности некоторых материалов

Таблица 4

Материал	$\sigma_в$, МПа	
	на растяжение	на сжатие
Сталь:		
углеродистая горячекатаная	310–600	—
углеродистая конструкционная	330–750	—
легированная конструкционная	430–780	—
в отливках	420–600	—
Чугун:		
серый	150–440	650–1000
ковкий	300–630	до 1400
Латунь	320–600	—
Бронза:		
оловянная	300–900	—
безоловянная	400–1500	—
Алюминий	150–300	
Дюралюминий	180–500	
Титановый сплав ВТ4	800–900	—
Винипласт	50	—
Полиэтилен	65	—

Модули упругости и коэффициенты Пуассона некоторых материалов

Таблица 5

Материал	Модуль упругости, ГПа		Коэффициент Пуассона
	E	G	
Сталь:			
углеродистая	200–210	81	0,24–0,28
легированная	210	81	0,25–0,33
литье	175	—	0,25–0,33
Медь:			

Материал	Модуль упругости, ГПа		Коэффициент Пуассона
	E	G	
прокатная	110–150	40	0,31–0,34
холоднотянутая	130	49	—
литье	84	—	—
Платина	170	—	0,39
Бронза:			
фосфористая катаная	115	42	0,32–0,35
марганцовистая катаная	110	40	0,36
алюминиевая, литье	105	42	—
Латунь:			
холоднотянутая	90–100	35–37	0,32–0,42
корабельная, катаная	100	—	0,36
Чугун:			
серый, белый	115–160	45	0,23–0,27
ковкий	155	—	—
Алюминий катаный	59–69	26–27	0,32–0,36
Сплавы:			
алюминиевые	70–72	27	0,32
магниевые	40–45	—	0,34
Дюралюминий катаный	71	27–37	
Сплавы титана	105–115	—	0,30

Ориентировочные значения основных допускаемых напряжений

Таблица 6

Материал	Допускаемое напряжение [σ], МПа	
	на растяжение	на сжатие
Сталь углеродистая горячекатаная	115–195	115–195
Сталь углеродистая конструкционная	110–240	110–240
Сталь легированная конструкционная	140–260	140–260
Сталь в отливках	90–160	90–160
Чугун в отливках серый	33–100	145–310
Чугун в отливках ковкий	85–110	95–125
Медь	30–110	30–110
Латунь	60–130	60–130
Бронза	50–110	50–110

Предельные прогибы некоторых элементов стальных конструкций (СНиП 1 1–23–82)

Таблица 7

Элемент конструкции	Относительный прогиб
Балка и ферма путей под краны с режимом работы:	
легким (включая ручные краны, тельферы, тали)	1/400
средним	1/500
тяжелым и весьма тяжелым	1/600
Балка и ферма покрытия и чердачного перекрытия:	
с подвесным оборудованием	1/400
без подвесного оборудования	1/250
прогон	1/200
профильный настил	1/150
Ригель и навесная стеновая панель	1/300

Стандартный ряд диаметров

10, 10,5, 11, 11,5, 12, 13, 14, 15, 16 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 33, 34, 36, 38, 40, 42, 45, 48, 50, 52, 55, 60, 63, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 120, 125, 130, далее через 10 мм.

Ответы на контрольные вопросы

Лекция 3	Вопрос 2	2,31 кН
Лекция 6	Вопрос 2	−65 кН·м
	Вопрос 5	1262 кН·м
Лекция 7	Вопрос 6	9,7 кН·м
	Вопрос 7	2,06 кН
Лекция 8	Вопрос 7	867 мм
Лекция 10	Вопрос 6	153 м
Лекция 13	Вопрос 10	17 кН
Лекция 16	Вопрос 3	6,78 кДж
	Вопрос 7	0,8
Лекция 17	Вопрос 2	4 Н
	Вопрос 6	0,3 кг·м^2
Практическое занятие 2	Вопрос 3	130 кН·м
	Вопрос 5	3 кН·м
Практическое занятие 3	Вопрос 2	3,9 см
Лекция 29	Вопрос 6	4,5 кН
	Вопрос 7	4,5 кН; 27 кН·м
Лекция 31	Вопрос 4	8 м
	Вопрос 5	175 кН·м
Лекция 32	Вопрос 6	121 кН·м

Коды правильных ответов на опросные карты

Вопросы	1	2	3	4	5
Тема 1.2 (Лекция 3)	3	2	3	3	2
Темы 1.1, 1.2 (Практ. занятие 1)	3	2	2	2	1
Тема 1.3 (Лекция 4)	1	2	3	2	2
Тема 1.4 (Практ. занятие 2)	3	2	4	2	2
Тема 1.5 (Лекция 7)	2	2	1	4	2
Тема 1.6 (Практ. занятие 3)	1	2	1	3	3

Темы 1.7, 1.8 (Лекция 10)	2	2	1	3	4
Тема 1.9 (Практ. занятие 4)	4	2	3	3	3
Темы 1.10, 1.11 (Лекция 12)	4	3	2	3	2
Темы 1.12, 1.13 (Лекция 14)	2	3	2	4	4
Тема 1.4 (Лекция 16)	3	2	2	2	3
Темы 1.4, 1.5 (Практ. занятие 5)	4	4	2	2	1
Тема 2.1 (Лекция 19)	2	1	3	2	2
Тема 2.2 (Лекция 21)	3	3	1	3	3
Тема 2.2 (Лекция 22)	4	4	3	1	1
Тема 2.2 (Практ. занятие 6)	3	3	3	1	1
Тема 2.3 (Лекция 24)	4	1	4	3	3
Тема 2.4 (Практ. занятие 7)	4	1	3	4	1
Тема 2.5 (Лекция 27)	1	3	2	4	2
Тема 2.5 (Практ. занятие 8)	3	3	3	2	4
Тема 2.6 (Лекция 30)	2	3	1	4	2
Тема 2.6 (Практ. занятие 9)	4	2	3	2	4
Тема 2.7 (Практ. занятие 10)	3/4	3	3	2	4
Тема 2.10 (Лекция 37)	3	4	2	2	4

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

Раздел 1. Теоретическая механика 4

Лекция 1. Основные понятия и аксиомы статики 4
Лекция 2. Плоская система сходящихся сил. Определение равнодействующей геометрическим способом 12
Лекция 3. Плоская система сходящихся сил. Определение равнодействующей аналитическим способом 19
Лекция 4. Пара сил и момент силы относительно точки 28
Лекция 5. Плоская система произвольно расположенных сил 34
Лекция 6. Балочные системы. Определение реакций опор и моментов защемления 42
Лекция 7. Пространственная система сил 50
Лекция 8. Центр тяжести 60
Лекция 9. Основные понятия кинематики 66
Лекция 10. Кинематика точки 71
Лекция 11. Простейшие движения твердого тела 79
Лекция 12. Сложное движение точки. Сложное движение твердого тела 86
Лекция 13. Основные понятия и аксиомы динамики. Понятия о трении 93
Лекция 14. Движение материальной точки. Метод кинетостатики 100
Лекция 15. Работа и мощность 109
Лекция 16. Работа и мощность. Коэффициент полезного действия 115
Лекция 17. Общие теоремы динамики 121

Практические занятия по разделу «Теоретическая механика» 130

Практическое занятие 1. Плоская система сходящихся сил . . . 130
Практическое занятие 2. Плоская система произвольно расположенных сил 137
Практическое занятие 3. Центр тяжести 146
Практическое занятие 4. Кинематика точки. Простейшие движения твердого тела 152

Практическое занятие 5. Работа и мощность. Общие теоремы динамики 158

Раздел 2. Сопротивление материалов 162

Лекция 18. Основные положения. Допущения, принятые при расчетах 162
Лекция 19. Основные положения. Нагрузки внешние и внутренние. Метод сечений 168
Лекция 20. Растяжение и сжатие. Внутренние силовые факторы. Напряжение 176
Лекция 21. Растяжение и сжатие. Продольные и поперечные деформации. Закон Гука 182
Лекция 22. Механические испытания, механические характеристики. Предельные и допускаемые напряжения 188
Лекция 23. Практические расчеты на срез и смятие. Основные расчетные формулы и предпосылки 197
Лекция 24. Практические расчеты на срез и смятие. Примеры расчетов 202
Лекция 25. Геометрические характеристики плоских сечений 208
Лекция 26. Кручение. Внутренние силовые факторы. Построение эпюр крутящих моментов 216
Лекция 27. Кручение. Напряжение и деформации при кручении 223
Лекция 28. Кручение. Расчеты на прочность и жесткость . . . 232
Лекция 29. Изгиб. Классификация видов изгиба. Внутренние силовые факторы при изгибе 239
Лекция 30. Изгиб. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. Основные правила построения эпюр . . . 246
Лекция 31. Изгиб. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов 255
Лекция 32. Изгиб. Нормальные напряжения при изгибе. Расчеты на прочность 262
Лекция 33. Понятие о касательных напряжениях при изгибе. Линейные угловые перемещения 270
Лекция 34. Сочетание основных деформаций. Гипотезы прочности 278
Лекция 35. Расчет бруса круглого поперечного сечения при сочетании основных деформаций 284
Лекция 36. Устойчивость сжатых стержней. Основные положения 290

Лекция 37. Устойчивость сжатых стержней. Расчеты на устойчивость 295
Лекция 38. Сопротивление усталости 301

Практические занятия по разделу «Сопротивление материалов» 306

Практическое занятие 6. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии 306
Практическое занятие 7. Геометрические характеристики плоских сечений 313
Практическое занятие 8. Кручение. Расчеты на прочность . . 319
Практическое занятие 9. Расчеты на прочность при изгибе . . 324
Практическое занятие 10. Расчет бруса круглого поперечного сечения при сочетании основных деформаций 331
Приложение 1 336
Приложение 2 341
Ответы на контрольные вопросы 344

Олофинская Валентина Петровна

Техническая механика

2-е издание исправленное

Учебное пособие

Редактор *С. И. Зубкова*
Корректор *В. Г. Овсянникова*
Компьютерная верстка *Ю. В. Кузнецовой*
Оформление серии *Л. Зарецкой*

Сдано в набор 16.11.2006. Подписано в печать 19.12.2006.
Формат 60x90/16. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 22,0. Уч.-изд. л. 21,5.
Печать офсетная. Бумага типографская. Тираж 3000 экз.
Заказ № 8060.

Издательство «ФОРУМ»
101831, Москва — Центр, Колпачный пер., д. 9а
Тел./факс: (495) 625-32-07, 625-52-43
E-mail: mail@forum-books.ru

ЛР № 070824 от 21.01.93
Издательский Дом «ИНФРА-М»
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в
Тел.: (495) 380-05-40
Факс: (495) 363-92-12
E-mail: books@infra-m.ru
Http://www.infra-m.ru

Отпечатано с предоставленных диапозитивов
в ОАО «Тульская типография». 300600, г. Тула, пр. Ленина, 109.

Профессиональное образование

ISBN 978-5-91134-114-5

техника

профессиональное образование

В.П. Олофинская

Техническая механика

ИЗДАТЕЛЬСТВО ФОРУМ